Les transformations élémentaires du plan

Table des matières

1 Définition **2**

1.1 Isométrie 2
1.2 La translation 3
1.3 La rotation 3
1.4 La réflexion 4
1.5 L'homothétie 5

2 Similitude **6**

2.1 Définition 6
2.2 Conséquences 6
2.3 Propriétés 7
2.3.1 Le produit scalaire 7
2.3.2 Les angles géométriques 7
2.3.3 Repère orthogonal 7
2.3.4 Conséquences 7

1 Définition

Définition 1 : Une transformation du plan est une bijection du plan dans lui-même. À tout point M, on associe un unique point M′, et tout point M′ a un unique antécédent.

Si T est la transformation, on note T^{-1} la transformation réciproque.

$$\mathrm{M} \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathrm{M}' \qquad \text{avec} \qquad T(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \quad \text{et} \quad T^{-1}(\mathrm{M}') = \mathrm{M}$$

Exemple : La translation, la rotation,la symétrie centrale, la réflexion ou l'homothétie sont des transformations. Par contre la projection orthogonale n'est pas une transformation car une fois le point projeté, on ne peut plus revenir en arrière : l'antécédent n'est pas unique.

Remarque : La transformation qui au point M associe lui-même s'appelle l'identité. Elle est notée : Id

1.1 Isométrie

Définition 2 : Une isométrie est une transformation que conserve les distances. Soit i une isométrie :

$$\begin{cases} \mathrm{A} \xrightarrow{i} \mathrm{A}' \\ \mathrm{B} \xrightarrow{i} \mathrm{B}' \end{cases} \quad \text{on a alors :} \quad \mathrm{A'B'} = \mathrm{AB}$$

Remarque :

- Les isométries élémentaires sont : les translations, les rotations, les symétries centrales et les réflexions.
- On distingue deux sortes d'isométrie :
  1) **Les déplacements** : isométries qui conservent les angles orientés :

  $$(\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'B'}}) = (\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

  On range dans cette catégorie : les translations et les rotations

  2) **Les antidéplacements** : isométries qui changent les angles orientés en leur opposé.

  $$(\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'B'}}) = -(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

  On range dans cette catégorie : les réflexions et les symétries glissées

- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.
  L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.

Propriété : Une isométrie conserve :

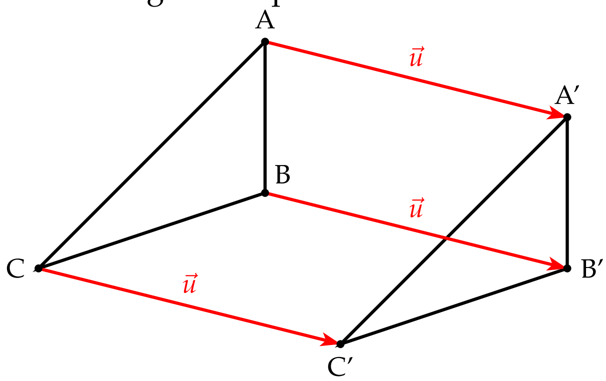
- Les distances : $A'B' = AB$
- Les aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$
- Le parallélisme : si $d \mathbin{/\!/} \delta$ alors $d' \mathbin{/\!/} \delta'$
- L'orthogonalité : si $d \perp \delta$ alors $d' \perp \delta'$
- Les angles géométriques : $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$
- Le milieu : si $I = m[AB]$ alors $I' = m[A'B']$
- L'alignement : si A, B et C sont alignés alors A', B' et C' le sont aussi.
- Le contact : si $I = d \cap \delta$ alors son image $I' = d' \cap \delta'$.

1.2 La translation

Définition 3 : Une translation t de vecteur $\vec{u}$ est définie par :

$$M \xrightarrow{t} M' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Exemple : Image d'un triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$



Propriété :

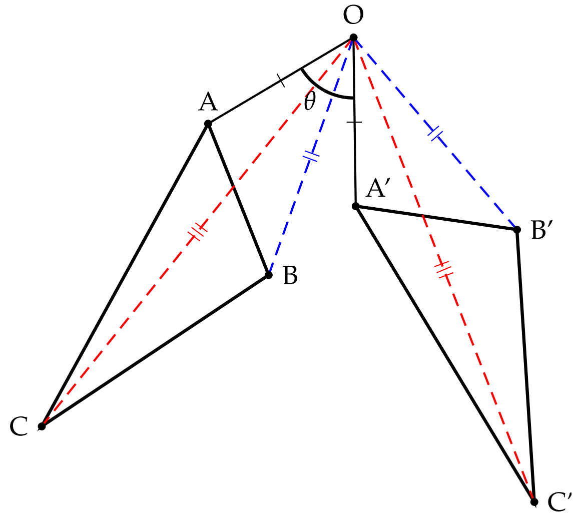
- Pour tous points A et B, on a : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$
- La translation n'admet pas de point fixe.
- La translation réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
- L'image d' d'une droite d par une translation est :
  1) $d' \mathbin{/\!/} d$ si la direction de d est différente de $\vec{u}$
  2) $d' = d$ si d et $\vec{u}$ ont même direction.

1.3 La rotation

Définition 4 : Une rotation r de centre Ω et d'angle θ est définie par :

$$M \xrightarrow{r} M' \quad \text{tel que} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \quad \text{et} \quad \Omega M' = \Omega M$$

Exemple : Image d'un triangle ABC ($\theta = \frac{\pi}{3}$)



Propriété :

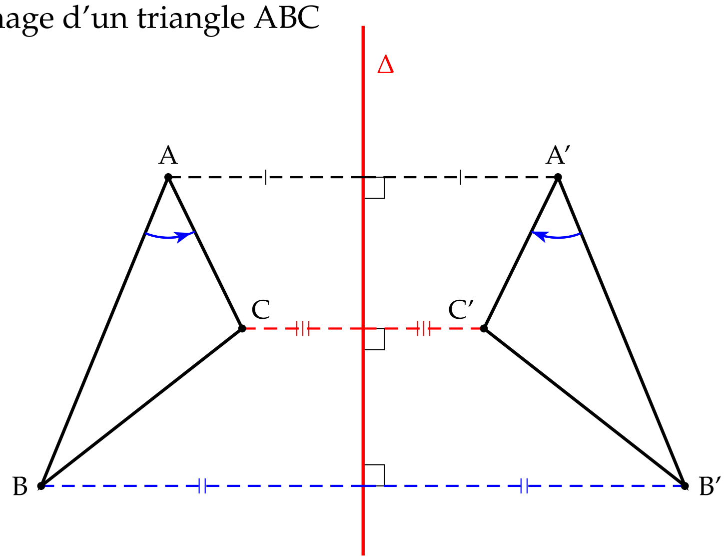
- La rotation possède un point invariant : son centre.
- Une rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{2}$ est un quart de tour direct noté Q_Ω.
- Une rotation de centre Ω d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est un quart de tour indirect noté Q'_Ω.
- Une rotation de centre Ω et d'angle π est une symétrie centrale de centre Ω notée S_Ω.
- L'image d' d'une droite d est une droite telle que : d' et d forme un angle θ.

1.4 La réflexion

Définition 5 : Une réflexion S d'axe (Δ) est une transformation définie par :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{S} \mathrm{M}' \quad \text{tel que } (\Delta) \text{ est la médiatrice de } [\mathrm{MM}']$$

Exemple : Image d'un triangle ABC



ABC est direct et A′B′C′ indirect

Remarque : Une réflexion est aussi appelée symétrie orthogonale

Propriété :

- La réflexion possède une droite où tous les points sont invariants : son axe.
- La réflexion inverse les angles orientés. C'est un antidéplacement.
- L'image d' d'une droite d est une droite telle que :
  1) $d' = d$ si $d = (\Delta)$ ou si $d \perp (\Delta)$
  2) $d' // d$ si $d // (\Delta)$.
  3) (Δ) est la bissectrice de l'angle formé par d et d' dans les autres cas.
- La réflexion réciproque est elle-même. (transformation involutive)

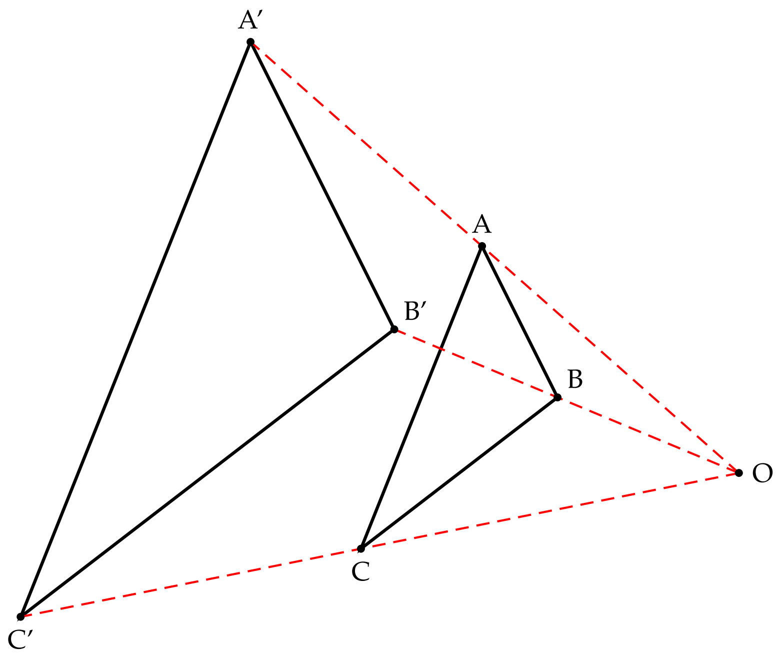
1.5 L'homothétie

Définition 6 : Une homothétie h de centre Ω et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) est une transformation définie par :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{h} \mathrm{M}' \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}'} = k\,\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}$$

Remarque : k peut être négatif

Exemple : Image d'un triangle ABC ($k = 1,5$)



Propriété :

- L'homothétie est une transformation qui agrandi les figures si $|k| > 1$ et qui les réduit si $|k| < 1$. Les distances sont multipliées par $|k|$
- Pour tous point A et B, on a : $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
- L'homothétie n'est pas une isométrie. Elle ne conserve ni les distances ni les aires, mais conserve les autres propriétés des isométries.
- Une homothétie possède un point invariant : son centre.

- L'aire d'une figure par une homothétie est multipliée par k^2.
- Une homothétie de centre Ω et de rapport $k = -1$ est une symétrie de centre Ω.
- L'image d' d'une droite d est une droite telle que :
  1) $d' = d$ si Ω est sur d.
  2) $d' // d$ si Ω n'est pas sur d.

2 Similitude

2.1 Définition

Définition 7 : Une similitude est une transformation qui multiplie les distances par un réel positif ou qui conserve le rapport des distances. Si M', A' et B' sont les images respectives de M, A et B, on a :

$$\text{A'B'} = k \times \text{AB} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}_+^* \qquad \text{ou} \qquad \frac{\text{A'M'}}{\text{AM}} = \frac{\text{B'M'}}{\text{BM}}$$

2.2 Conséquences

Propriété 1 : On peut vérifier facilement que :

1) Les transformations élémentaires sont des similitudes.
2) L'identité est une similitude.
3) Une isométrie est une similitude de rapport 1.
4) La composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$
5) La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
6) Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie. (voir démonstration ci-dessous)

Démonstration : (propriété 6) Soit s une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$. La composée de cette similitude et de cette homothétie est donc une isométrie i car $k \times \dfrac{1}{k} = 1$. On peut donc écrire :

$s \circ h = i$

En composant à gauche par l'homothétie réciproque h^{-1}, on a :

$s \circ h \circ h^{-1} = i \circ h^{-1}$ or $h \circ h^{-1} = Id$, donc :

$s = i \circ h^{-1}$

or h^{-1} est bien une homothétie de rapport k.

2.3 Propriétés

2.3.1 Le produit scalaire

Propriété 2 : Dans une similitude de rapport k, le produit scalaire est multiplié par k^2

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Démonstration : $BC^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2$ et $B'C'^2 = (\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'})^2$.

$$\begin{aligned}
&B'C' = k^2 BC \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{A'C'})^2 = k^2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \\
&B'C'^2 + 2\overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{A'C'} + A'C' = k^2 BC^2 + 2k^2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + k^2 AC \\
&k^2 BC^2 + 2\overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{A'C'} + k^2 AC = k^2 BC^2 + 2k^2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + k^2 AC \\
&2\overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 2k^2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

2.3.2 Les angles géométriques

Propriété 3 : Une similitude conserve les angles géométriques :

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$$

Pour le démontrer, on utilise le produit scalaire, de l'égalité de deux cosinus, on en déduit l'égalité des angles géométriques.

2.3.3 Repère orthogonal

Propriété 4 : Un repère orthogonal se transforme par une similitude en un repère orthogonal, c'est à dire qu'un triangle rectangle isocèle se transforme en un triangle rectangle isocèle.

2.3.4 Conséquences

Propriété 5 : Une similitude transforme une droite en droite, un cercle en cercle. Une similitude conserve les angles géométriques, le parallélisme, l'orthogonalité, l'alignement, le contact, le barycentre et multiplie les aires par le carré de son rapport.