Calculs algébriques - Correction

1 Calculs de base

EXERCICE 1

⚠ Les deux premières fractions demande de la persévérance :

a) $A = \dfrac{-\dfrac{-18+5}{15}}{\dfrac{27+8}{36}} \div \dfrac{\dfrac{1-10}{10}}{\dfrac{8+21}{6}} = \left(-\dfrac{13}{15} \times \dfrac{36}{35}\right) \div \left(-\dfrac{9}{10} \times \dfrac{6}{29}\right) = \dfrac{13 \times 36 \times 10 \times 29}{15 \times 35 \times 9 \times 6}$

$= \dfrac{13 \times 2 \times 2 \times 29}{3 \times 35 \times 3} = \dfrac{1\,508}{315}$

b) $B = 1 + \dfrac{2}{2 - \dfrac{3}{3 + \dfrac{8}{7}}} = 1 + \dfrac{2}{2 - \dfrac{21}{29}} = 1 + \dfrac{58}{37} = \dfrac{37+58}{37} = \dfrac{95}{37}$

c) $C = \dfrac{\dfrac{6+3-2}{6}}{\dfrac{8-2-1}{4}} = \dfrac{7}{6} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{7 \times 2}{3 \times 5} = \dfrac{14}{15}$

d) $D = \dfrac{\dfrac{6}{5}}{1 + \dfrac{5}{9}} = \dfrac{6}{5} \times \dfrac{9}{14} = \dfrac{3 \times 9}{5 \times 7} = \dfrac{27}{35}$

EXERCICE 2

Simplifier et calculer les nombres suivants :

1) $x = 0,7$

2) $y = 30$

3) $z = 6\sqrt{3}$

4) $x = \dfrac{8\sqrt{2}}{5}$

5) $y = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

6) $z = \dfrac{8 - 3\sqrt{5}}{19}$

7) $x = \dfrac{11\sqrt{2} - 2}{17}$

8) $y = (3 + \sqrt{5}) \times \dfrac{7 - \sqrt{5}}{11} = \dfrac{16 + 4\sqrt{5}}{11}$

9) $x = \sqrt{9 - 5} = 2$

10) $y = 3 - \sqrt{5} - 2 \times 2 + 3 + \sqrt{5} = 2$

EXERCICE 3

1) a) On factorise :

$$(5x-3)(5x-3-2x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (5x-3)(3x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{\frac{1}{3}\,;\,\frac{3}{5}\right\}$$

b) On développe :
$25x^2 - 30x + 9 - 10x^2 + 6x + 10x - 6 = 3 \Leftrightarrow 15x^2 - 14x = 0 \Leftrightarrow$
$x(15x - 14) = 0 \Leftrightarrow S = \left\{0\,;\,\dfrac{14}{15}\right\}$

c) On développe :
$15x^2 - 14x + 3 = 15x^2 \Leftrightarrow -14x + 3 = 0 \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{3}{14}\right\}$

2) a) Égalité de deux carrés
- $5x - 3 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ **ou**
- $5x - 3 = -2x + 1 \Leftrightarrow 7x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{7}$

Les solutions sont : $S = \left\{\dfrac{4}{7}\,;\,\dfrac{2}{3}\right\}$

b) On développe :
$25x^2 - 30x + 9 - 4x^2 + 4x - 1 = 8 \Leftrightarrow 21x^2 - 26x = 0 \Leftrightarrow$
$x(21x - 26) = 0 \Leftrightarrow S = \left\{0\,;\,\dfrac{26}{21}\right\}$

c) On développe :
$21x^2 - 26x + 8 = -26x \Leftrightarrow 21x^2 = -8$ impossible $\Leftrightarrow S = \varnothing$

EXERCICE 4

1) a) Égalité de deux carrés : $(3x - 9)^2 = (x - 2)^2$
- $3x - 9 = x - 2 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$ **ou**
- $3x - 9 = -x + 2 \Leftrightarrow 4x = 11 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{4}$

Le solutions sont : $S = \left\{\dfrac{11}{4}\,;\,\dfrac{7}{2}\right\}$

b) On factorise :
$(3x + 1)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1) = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(3x + 1 - 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow$
$3(3x + 1)(-x + 1) \Leftrightarrow S = \left\{-\dfrac{1}{3}\,;\,1\right\}$

c) $x \in D_f = \mathbb{R} - \{-1\,;\,2\}$, $(x - 1)(x - 2) = (x + 1)^2 \Leftrightarrow$
$x^2 - 3x + 2 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5} \in D_f \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$

2) a) $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$, on prend à l'extérieur des racines
$S =]-\infty\,; -2[\cup \left[-\dfrac{1}{3}\,; +\infty\right[$

b) On factorise :
$(3x + 1)^2 - 2(3x + 1)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(3x + 1 - 2x - 2) < 0 \Leftrightarrow$
$(3x + 1)(x - 1) < 0$

On prend à l'intérieur des racines : $S = \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,1\right[$

2 Second degré

2.1 Forme canonique

EXERCICE 5

a) $\mathscr{C}_f$ est une parabole dirigée vers le bas ($a = -3$)
f admet un maximum en $x = 2$

b) $g(x) = 2\left(x^2 - 3x + \dfrac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{2}\right] = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2}$
$\mathscr{C}_g$ est une parabole dirigée vers le haut ($a = 2$)
g admet un minimum en $x = \dfrac{3}{2}$

2.2 Équations

EXERCICE 6

1) $\Delta = 36 - 32 = 4 = 2^2$, $\Delta > 0$, deux racines, $S = \{2\,;\,4\}$

2) $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, $\Delta < 0$, pas de solution, $S = \varnothing$

3) On divise par 5 : $x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)^2 = 0$,
une racine double $S = \{1\}$

4) $2x^2 - 8x - 2 = 0$, on divise par 2, $x^2 - 4x - 1 = 0$, $\Delta = 16 + 4 = 20 = (2\sqrt{5})^2$
$\Delta > 0$, deux racines, $S = \left\{2 - \sqrt{5}\,;\,2 + \sqrt{5}\right\}$

5) $x \in D_f = \mathbb{R} - \{3\,;\,5\}$, $(2x-1)(x-3) = (x+1)(x-5) \;\Leftrightarrow$
$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x - 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 3x + 8 = 0$
$\Delta = 9 - 32 = -23$, $\Delta < 0$, pas de racine, $S = \varnothing$

EXERCICE 7

Résolvons $f(x) > g(x) \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 3x + 1 > -4x + 2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + x - 1 > 0.$

$x_1 = -1$ racine évidente, $P = -\dfrac{1}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{1}{2}$

- $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x \in]-\infty\,;-1[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$
- $\mathscr{C}_f$ coupe $\mathscr{C}_g$ en $x = -1$ en $x = \dfrac{1}{2}$
- $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour $x \in \left]-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

EXERCICE 8

On résout $4x^2 - 7x + 3 = 0$ (1)
$x_1 = 1$, racine évidente, $P = \dfrac{3}{4}$, donc $x_2 = \dfrac{3}{4}$

a) On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$

D'après la résolution de (1), $x^2 = 1$ ou $x^2 = \dfrac{3}{4}$.

On obtient alors 4 solutions : $S = \left\{-1\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,1\right\}$

b) On pose $X = \sqrt{x}$ avec $x \geqslant 0$, l'équation devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$

D'après la résolution de (1), $\sqrt{x} = 1$ ou $\sqrt{x} = \dfrac{3}{4}$.

On obtient 2 solutions : $S = \left\{\dfrac{9}{16}\,;\,1\right\}$

c) On pose $X = |x|$, l'équation devient $2X^2 - 7X + 3 = 0$

D'après la résolution de (1), $|x| = 1$ ou $|x| = \dfrac{3}{4}$.

On obtient alors 4 solutions : $S = \left\{-1\,;-\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{3}{4}\,;\,1\right\}$

EXERCICE 9

Calculons $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Comme $x = 0$ n'est pas solution de l'équation, on divise l'équation par x^2 :

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

On pose $X = x + \dfrac{1}{x}$, l'équation devient :

$X^2 - 2X - 3 = 0$, $X_1 = -1$ racine évidente, $P = -3$, donc $X_2 = 3$.

On revient à x :

- $x + \dfrac{1}{x} = -1 \overset{\times x}{\Leftrightarrow} x^2 + x + 1 = 0$.

  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, pas de solution.

- $x + \dfrac{1}{x} = 3 \overset{\times x}{\Leftrightarrow} x^2 - 3x + 1 = 0$.

  $\Delta = 9 - 4 = 5$, 2 solutions $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

L'ensemble solution : $S = \left\{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

EXERCICE 10

2 est solution donc $3 \times 2^2 - 2a + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \dfrac{18}{2} = 9$.

L'équation devient alors : $3x^2 - 9x + 6 = 0 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} x^2 - 3x + 2 = 0$.

Le produit des racines est $P = 2$, donc l'autre racine est $\dfrac{P}{2} = 1$

2.3 Équations paramétriques

Exercice 11

Soit (E_m) l'équation : $(m-1)x^2-(2m+3)x+m=0$, avec $m \in \mathbb{R}$.

a) • Si $m=1$, E_1 est du premier degré. $\mathrm{E}_1 : -5x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{5}$.
L'équation E_1 admet une solution.

• Si $m \neq 1$,
$\Delta=(2m+3)^2-4m(m-1)=4m^2+12m+9-4m^2+4m=16m+9$.

m	$-\infty$	$-\dfrac{9}{16}$		1	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	$\|$	$+$
Nombre de solutions	pas de solution	1 sol double x_0	2 solutions x_1 et x_2	1^{er} degré 1 sol	2 solutions x_1 et x_2

b) Pour obtenir deux solutions positives, on doit avoir :

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,1\right[\cup]1\,;+\infty[\\ \dfrac{2m+3}{m-1} > 0 \\ \dfrac{m}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,1\right[\cup]1\,;+\infty[\\ m \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[\cup]1\,;+\infty[\\ m \in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;+\infty[\end{cases}$$

Conclusion : E_m admet deux solutions positives si $m \in A =]1\,;+\infty[$

c) Pour obtenir deux solutions négatives, on doit avoir :

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,1\right[\cup]1\,;+\infty[\\ \dfrac{2m+3}{m-1} < 0 \\ \dfrac{m}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,1\right[\cup]1\,;+\infty[\\ m \in \left]-\dfrac{3}{2}\,;\,1\right[\\ m \in]-\infty\,;\,0[\cup]1\,;+\infty[\end{cases}$$

Conclusion : E_m admet deux solutions négatives si $m \in B = \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,0\right[$

d) Pour obtenir deux solutions de signes contraire, on doit avoir :

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,1\right[\cup]1\,;+\infty[\\ \dfrac{m}{m-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left]-\dfrac{9}{16}\,;\,1\right[\cup]1\,;+\infty[\\ m \in]0\,;\,1[\end{cases}$$

Conclusion : E_m admet deux solutions de signes contraires si $m \in C =]0\,;\,1[$

Exercice 12

E_m est du second degré si $m \neq \dfrac{1}{3}$

$$\Delta=(m+6)^2-4(3m-1)(-m-9)=m^2+12m+36+12m^2+108m-4m-36$$
$$=13m^2+116m=m(13m+116)$$

a) Pour obtenir deux solutions strictement positives, on doit avoir :

$$\begin{cases} m \neq \dfrac{1}{3} \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left] -\infty\,; -\dfrac{116}{13}\right[\cup]0\,;+\infty[\\ \dfrac{-m-6}{3m-1} > 0 \\ \dfrac{-m-9}{3m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left] -\infty\,; -\dfrac{116}{13}\right[\cup]0\,;+\infty[\\ m \in \left] -6\,; \dfrac{1}{3}\right[\\ m \in \left] -9\,; \dfrac{1}{3}\right[\end{cases}$$

Conclusion : E$_m$ admet deux solutions positives si $m \in A = \left]0\,; \dfrac{1}{3}\right[$

b) Pour obtenir deux solutions strictement négatives, on doit avoir :

$$\begin{cases} m \neq \dfrac{1}{3} \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left] -\infty\,; -\dfrac{116}{13}\right[\cup]0\,;+\infty[\\ \dfrac{-m-6}{3m-1} < 0 \\ \dfrac{-m-9}{3m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left] -\infty\,; -\dfrac{116}{13}\right[\cup]0\,;+\infty[\\ m \in]-\infty\,;-6[\cup \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[\\ m \in \left] -9\,; \dfrac{1}{3}\right[\end{cases}$$

Conclusion : E$_m$ admet deux solutions négatives si $m \in B = \left] -9\,; -\dfrac{116}{13}\right[$

2.4 Somme et produit des racines

EXERCICE 13

1) $\Delta = 49 + 24 = 73$.
   $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions distincte x_1 et x_2

2) $S = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{3}$ et $P = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{2}{3}$

   a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = \dfrac{49}{9} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{61}{9}$

   b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
   $= S^3 - 3PS = -\dfrac{343}{27} - \dfrac{14}{3} = -\dfrac{469}{27}$

   c) $(x_1 + x_2)^2 = S^2 = \dfrac{49}{9}$

   d) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \dfrac{S}{P} = \dfrac{7}{2}$

   e) $\dfrac{1}{x_1 - 2} + \dfrac{1}{x_2 - 2} = \dfrac{x_1 + x_2 - 4}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \dfrac{x_1 + x_2 - 4}{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = \dfrac{S - 4}{P - 2S + 4}$
   $= \dfrac{-\dfrac{7}{3} - 4}{-\dfrac{2}{3} + \dfrac{14}{3} + 4} = -\dfrac{19}{24}$

EXERCICE 14

1) $\Delta = (2m+3)^2 - 4(m^2+5) = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 20 = 12m - 11$

(E_m) admet deux solutions distinctes si $\quad m > \dfrac{11}{12}$

2) a) $x_1^2 + x_2^2 = 53 \quad\Leftrightarrow\quad S^2 - 2P = 53 \quad\Leftrightarrow\quad (2m+3)^2 - 2(m^2+5) = 53 \quad\Leftrightarrow$

$2m^2 + 12m + 9 - 2m^2 - 10 = 53 \quad\Leftrightarrow\quad 2m^2 + 12m - 54 = 0 \quad\overset{\div 2}{\Leftrightarrow}$

$m^2 + 6m - 27 = 0$

on a : $\quad \Delta_m = 36 + 108 = 144 = 12^2,\quad$ deux solutions distinctes :

$m_1 = \dfrac{-6+12}{2} = 3 \quad$ et $\quad m_2 = \dfrac{-6-12}{2} = -9 < \dfrac{11}{12}$ (non retenu).

L'unique valeur de m est donc 3.

b) $|x_1 - x_2| = 13 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1 - x_2)^2 = 169 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 169 \quad\Leftrightarrow$

$S^2 - 4P = 169 \quad\Leftrightarrow\quad (2m+3)^2 - 4(m^2+20) = 169 \quad\Leftrightarrow\quad 12m - 11 = 169 \quad\Leftrightarrow$

$m = \dfrac{180}{12} = 15$

2.5 Équations irrationnelles

EXERCICE 15

Rappel : $\quad \sqrt{A(x)} = B(x) \quad\Leftrightarrow\quad B(x) \geqslant 0 \text{ et } A(x) = B^2(x).$

a) $x \in D_f = \left[\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$ et

$x + 2 = (3x-4)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x + 2 = 9x^2 - 24x + 16 \quad\Leftrightarrow\quad 9x^2 - 25x + 14 = 0$

$\Delta = 625 - 504 = 121 = 11^2 > 0 \quad$ deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{25+11}{18} = 2 \in D_f \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{25-11}{18} = \dfrac{7}{9} \notin D_f.$

L'ensemble solution : $\quad S = \{2\}$

b) $x \in D_f = \left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ et

$3x^2 - 11x + 21 = 4x^2 - 12x + 9 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - x - 12 = 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0 \quad$ deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{1+7}{2} = 4 \in D_f \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{1-7}{2} = -3 \notin D_f.$

L'ensemble solution : $\quad S = \{4\}$

c) $2x + 1 + \sqrt{-7x-5} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{-7x-5} = -2x - 1$

$x \in D_f = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right]$ et

$-7x - 5 = 4x^2 + 4x + 1 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2 + 11x + 6 = 0$

$\Delta = 121 - 96 = 25 = 5^2 > 0 \quad$ deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-11+5}{8} = -\dfrac{3}{4} \in D_f$ et $x_2 = \dfrac{-11-5}{8} = -2 \in D_f$.

L'ensemble solution : $S = \left\{-2\,;-\dfrac{3}{4}\right\}$

d) $x + \sqrt{2x+28} = 26 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2x+28} = 26 - x$

$x \in D_f =]-\infty\,;-26]$ et

$2x + 28 = 676 - 52x + x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 54x + 648 = 0$

$\Delta = 2\,916 - 2\,592 = 324 = 18^2 > 0$ deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{54+18}{2} = 36 \notin D_f$ et $x_2 = \dfrac{54-18}{2} = 18 \in D_f$.

L'ensemble solution : $S = \{18\}$

e) Il sera nécessaire d'élever deux fois au carré en n'oubliant pas les conditions qui vont avec.

$\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-5} = 7 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3x-5} = 7 - \sqrt{x+2}$

- $\sqrt{x+2} \leqslant 7 \quad\Leftrightarrow\quad x \leqslant 51$, d'où $x \in]-\infty\,;51]$, on élève au carré
  $3x - 5 = 49 - 14\sqrt{x+2} + x + 2 \quad\Leftrightarrow\quad 14\sqrt{x+2} = 56 - 2x$
- $56 - 2x \geqslant 0$ d'où $x \in D_f =]-\infty\,;28]$, on élève au carré
  $196(x+2) = 3136 - 224x + 4x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4x^2 - 420x + 2744 = 0 \quad\overset{\div 4}{\Leftrightarrow}$
- $x^2 - 105x + 686 = 0$
  $\Delta = 11\,025 - 2\,744 = 8\,281 = 91^2 > 0$ deux solutions distinctes :
  $x_1 = \dfrac{105+91}{2} = 98 \notin D_f$ et $x_2 = \dfrac{105-91}{2} = 7 \in D_f$.
- L'ensemble solution : $S = \{7\}$

f) Idem, on élève deux fois au carré.

L'ensemble de définition : $\begin{cases} x \geqslant -\dfrac{9}{5} \\ x \geqslant 4 \\ x \geqslant -\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x \geqslant 4 \quad\Leftrightarrow\quad D_f = [4\,;+\infty[$

$\sqrt{5x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{3x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{5x+9} = \sqrt{x-4} + \sqrt{3x+1}$

$x \in D_f$, on élève au carré :

$5x + 9 = x - 4 + 2\sqrt{(x-4)(3x+1)} + 3x + 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{3x^2 - 11x - 4} = x + 12$

On doit avoir en plus $x \geqslant -12$, l'ensemble de définition est inchangé

$x \in D_f$, on élève au carré :

$4(3x^2 - 11x - 4) = x^2 + 14x + 144 \quad\Leftrightarrow\quad 12x^2 - 44x - 16 = x^2 + 24x + 144 \quad\Leftrightarrow$

$11x^2 - 68x - 160 = 0$

$\Delta = 4\,624 + 7\,040 = 11\,664 = 108^2 > 0$ deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{68+108}{22} = 8 \in D_f$ et $x_2 = \dfrac{68-108}{22} = -\dfrac{20}{11} \notin D_f$.

L'ensemble solution : $S = \{8\}$

2.6 Inéquations

EXERCICE 16

1) 2 racines : -1 et $-\dfrac{1}{2}$

On prend à l'extérieur des racines : $S = \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

2) $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0, \;\Rightarrow\; \forall x \in \mathbb{R},\; -2x^2 + x - 3 < 0$, donc $S = \varnothing$

3) $-x^2 + 8x - 16 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x + 16 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (x-4)^2 \leqslant 0$

Uniquement vérifié pour $x = 4$, donc $S = \{4\}$

4) $\dfrac{2x^2+3x+1}{(x-2)(x+2)} \leqslant 0.$ $D_f = \mathbb{R} - \{-2\,;\,2\}$

2 racines au numérateurs : -1 et $-\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2+3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-4}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$S = \left]-2\,;-1\right] \cup \left[-\frac{1}{2}\,;\,2\right[$$

5) $\dfrac{2x+1}{x-2} \leqslant \dfrac{x+1}{x+3} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{(2x+1)(x+3)-(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow$

$\dfrac{2x^2+7x+3-x^2+x+2}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2x^2+8x+5}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0,$ $D_f = \mathbb{R} - \{-3\,;\,2\}$

Racines du numérateur : $\Delta = 64 - 20 = 44 = (2\sqrt{11})^2 > 0$, deux racines :

$x_1 = \dfrac{-8+2\sqrt{11}}{2} = -4+\sqrt{11}$ et $x_2 = \dfrac{-8-2\sqrt{11}}{2} = -4-\sqrt{11}$

x	$-\infty$		$-4-\sqrt{11}$		-3		$-4+\sqrt{11}$		2		$+\infty$
x^2+8x+5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+3)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2+8x+5}{(x-2)(x+3)}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

$$S = [-4-\sqrt{11}\,;-3[\,\cup\,[-4+\sqrt{11}\,;\,2[$$

EXERCICE 17

1) $\dfrac{x^2+2x-15}{-x^2+2x+5} > 0$

- Racine du numérateur : $\Delta = 4+60 = 64 = 8^2 > 0$, 2 racines :

  $x_1 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$

- Racines du dénominateur : $\Delta = 4+20 = 24 = (2\sqrt{6})^2 > 0$, 2 racines :

  $x_3 = \dfrac{-2+2\sqrt{6}}{-2} = 1-\sqrt{6}$ et $x_4 = \dfrac{-2-2\sqrt{6}}{-2} = 1+\sqrt{6}$,

  $D_f = \mathbb{R} - \left\{1-\sqrt{6}\,;\,1+\sqrt{6}\right\}$

x	$-\infty$		-5		$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$		3		$+\infty$
$x^2+2x-15$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x+5$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$\dfrac{x^2+2x-15}{-x^2+2x+5}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$$S = [-5\,;\,1+\sqrt{6}[\cup]1+\sqrt{6}\,;\,3]$$

2) $\dfrac{3x^2-6x+4}{2x^2-x-1} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{3x^2-6x+4-4x^2+2x+2}{2x^2-x-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2-4x+6}{2x^2-x-1} > 0$

- Racine du numérateur : $\Delta = 16+24 = 40 = (2\sqrt{10})^2 > 0$, 2 racines :

  $x_1 = \dfrac{4+2\sqrt{10}}{-2} = -2-\sqrt{10}$ et $x_2 = \dfrac{4-2\sqrt{10}}{-2} = -2+\sqrt{10}$

- Racines évidentes du dénominateur : 1 et $-\dfrac{1}{2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\,;\,1\right\}$

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{10}$		$-\frac{1}{2}$		1		$-2+\sqrt{10}$		$+\infty$
$-x^2-4x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x^2-x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-x^2-4x+6}{2x^2-x-1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$$S = \left]-2-\sqrt{10}\,;-\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;-2+\sqrt{10}[$$

3) Racines évidentes de $3x^2-2x-8$: 2 et $-\dfrac{4}{3}$, donc

$3x^2-2x-8 = 3(x-2)\left(x+\dfrac{4}{3}\right) = (x-2)(3x+4) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\,;\,2\right\}$.

$\dfrac{2x-3}{x-2} - \dfrac{4x-1}{3x^2-2x-8} < \dfrac{65}{32} \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-2} - \dfrac{4x-1}{(x-2)(3x+4)} - \dfrac{65}{32} < 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{32(2x-3)(3x+4)-32(4x-1)-65(x-2)(3x+4)}{32(x-2)(3x+4)} < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{32(6x^2-x-12)-32(4x-1)-65(3x^2-2x-8}{32(x-2)(3x+4)} < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{192x^2-32x-384-128x+32-195x^2+130x+520}{32(x-2)(3x+4)} < 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{-3x^2-30x+168}{32(x-2)(3x+4)} < 0 \overset{\times\frac{32}{3}}{\Leftrightarrow} \frac{-x^2-10x+56}{(x-2)(3x+4)} < 0$$

Racines du numérateur : $\Delta = 100+224 = 324 = 18^2 > 0$, 2 racines :

$x_1 = \dfrac{10+18}{-2} = -14$ et $x_2 = \dfrac{10-18}{-2} = 4$

x	$-\infty$		-14		$-\frac{4}{3}$		2		4		$+\infty$
$-x^2-10x+56$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-2)(3x+4)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2-10x+56}{(x-2)(3x+4)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$$S =]-\infty\,;-14[\cup \left]-\frac{4}{3}\,;2\right[\cup]4\,;+\infty[$$

4) $2 < (2x-3)^2 \leqslant \dfrac{25}{4} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} < |2x-3| \leqslant \dfrac{5}{2}.$

On analyse deux cas :

- $x \geqslant -\dfrac{3}{2}$

$$\sqrt{2} < 2x+3 \leqslant \frac{5}{2}$$
$$\sqrt{2}-3 < 2x \leqslant -\frac{1}{2}$$
$$\frac{-3+\sqrt{2}}{2} < x \leqslant -\frac{1}{4}$$

- $x < -\dfrac{3}{2}$

$$\sqrt{2} < -2x-3 \leqslant \frac{5}{2}$$
$$\sqrt{2}+3 < -2x \leqslant \frac{11}{2}$$
$$-\frac{11}{4} \leqslant x < \frac{-3-\sqrt{2}}{2}$$

L'ensemble solution : $S = \left[-\dfrac{11}{4}\,;\dfrac{-3-\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{-3+\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1}{4}\right]$

EXERCICE 18

1) a) $\Delta = (2m+1)^2 - 4m^2 = 4m^2+4m+1-4m^2 = 4m+1$

Pour que l'inéquation soit vérifiée pour tout réel x, il faut que :

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$$

L'inéquation est toujours vérifiée pour $m \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{4}\right[$

b) $\Delta = 4 - 4(2m+1)(m+1)^2 = 4[1-(2m+1)(m^2+2m+1)]$
$= 4(1-2m^3-4m^2-2m-m^2-2m-1) = -4m(2m^2+5m+4)$

Pour que l'inéquation soit vérifiée pour tout réel x, il faut que :

$$\begin{cases} (m+1)^2 > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m(2m^2+5m+4) \leqslant 0 \\ \text{racines de } 2m^2+5m+4 \\ \Delta_m = 25-32 = -7 < 0 \\ \forall m \in \mathbb{R},\ \ 2m^2+5m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m \geqslant 0$$

L'inéquation est toujours vérifiée pour $m \in \mathbb{R}_+$

2) $x_1 < 2 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1-2) < 0 < (x_2-2)$

On pose : $X = x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x = X+2$
Les racines X_1 et X_2 du polynôme en X doivent avoir des signes opposés.

$(m-1)^2(X+2)^2 - m(X+2) + 3m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$
$(m+1)^2X^2 + 4(m+1)^2X + 4(m+1)^2 - mX - 2m + 3m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$
$(m+1)^2X^2 + [4(m+1)^2 - m]X + 4m^2 + 8m + 4 + m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$
$(m+1)^2X^2 + (4m^2+7m+4)X + 4m^2 + 9m + 5 = 0$

Pour que les racines soient de signes opposés, on doit avoir :

$P < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4m^2+9m+5}{(m+1)^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4m^2+9m+5 < 0.$

$m_1 = -1$ racine évidente donc $m_2 = -\dfrac{5}{4}.$

Les valeurs possibles pour m sont : $S = \left] -\dfrac{5}{4} \,; -1 \right[.$

On vérifie ensuite aisément que pour ces valeurs le discriminant du polynôme en X est positif. L'ensemble solution est bien S.

2.7 Systèmes

EXERCICE 19

Rappel : Si l'on connaît la somme S et le produit P de deux inconnues x et y, alors x et y sont solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

1) x et y sont solutions de $X^2 - X - 6 = 0.$

$X_1 = -2$ racine évidente donc $X_2 = 3.$

Les solutions du système sont : $S = \{(-2\,;\,3)\,;\,(3\,;-2)\}$

2) $x^2 + y^2 - xy = 13 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2 - 3xy = 13 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -3.$

x et y sont solutions de $X^2 - 2X - 3 = 0.$

$X_1 = -1$ racine évidente donc $X_2 = 3.$

Les solutions du système sont : $S = \{(-1\,;\,3)\,;\,(3\,;-1)\}$

3) $\begin{cases} xy^2 + x^2y = -30 & (1) \\ xy + x + y = -13 & (2) \end{cases}$

De (2), $x + y = -13 - xy$, en remplaçant dans (1), on a :

$xy(-13 - xy) = -30 \quad \Leftrightarrow \quad xy(13 + xy) = 30 \quad \Leftrightarrow \quad (xy)^2 + 13(xy) - 30 = 0.$

On pose $P = xy$, on a alors $P^2 + 13P - 30 = 0.$

$\Delta = 169 + 120 = 289 = 17^2 > 0$, 2 solutions :

$P_1 = \dfrac{-13 + 17}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \dfrac{-13 - 17}{2} = -15.$

On obtient les sommes correspondantes : $S_1 = -15$ et $S_2 = 2$.

x et y sont alors solutions des équations :

$$X^2 + 15X + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad X^2 - 2X - 15 = 0$$

- $X^2 + 15X + 2 = 0$, on a

  $\Delta = 225 - 8 = 217$ soit $X_1 = \dfrac{-15 + \sqrt{217}}{2}$ ou $X_2 = \dfrac{-15 - \sqrt{217}}{2}$.

- $X^2 - 2X - 15 = 0$, on a

  $\Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2$ soit $X_3 = \dfrac{2 + 8}{2} = 5$ ou $X_4 = \dfrac{2 - 8}{2} = -3$

$S = \left\{ \left(\dfrac{-15+\sqrt{217}}{2} ; \dfrac{-15-\sqrt{217}}{2} \right) ; \left(\dfrac{-15-\sqrt{217}}{2} ; \dfrac{-15+\sqrt{217}}{2} \right) ; (5 ; -3) ; (-3 ; 5) \right\}$

2.8 Équations du 3e degré

EXERCICE 20

Soit l'équation (E) : $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$

a) $X = x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = X - 2$. L'équation (E) devient :

$$\begin{aligned} (X-2)^3 + 6(X-2)^2 + 9(X-2) + 4 &= 0 \\ X^3 - 6X^2 + 12X - 8 + 6X^2 - 24X + 24 + 9X - 18 + 4 &= 0 \\ X^3 - 3X + 2 &= 0 \end{aligned}$$

b) $X_1 = 1$ racine évidente de (E_1), car $1 - 3 + 2 = 0$.

c) Comme 1 est racine évidente de (E_1), on peut factoriser par $(X - 1)$. On obtient la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 0X^2 - 3X + 2 & X - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-X^3 + X^2} \qquad\qquad & X^2 + X - 2 \\ 0X^3 + X^2 - 3X \quad & \\ \underline{-X^2 + X} \quad & \\ 0X^2 - 2X + 2 & \\ \underline{2X - 2} & \\ 0X + 0 & \end{array}$$

$(E_1) : (X - 1)(X^2 + X - 2) = 0$

d) Racine de $X^2 + X - 2 = 0$.

$X_2 = 1$ racine évidente donc $X_3 = -2$.

(E_1) a 1 racine simple $X_3 = -2$ et une racine double $X_1 = X_2 = 1$.

Pour (E), on revient à x : $x = X - 2$, d'où $x = -4$ et $x = -1$.

2.9 Pivot de Gauss

EXERCICE 21

a) $\begin{cases} x + 3y + z = 30 \\ 2x - y - z = -3 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 30 & L_1 \\ x + y - z = 4 & L_2 \\ 2x - y - z = -3 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + 3y + z = 30 & L_1 \\ 0x - 2y - 2z = -26 & L_2 - L_1 \\ 0x - 7y - 3z = -63 & L_3 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 30 & L'_1 \\ 0x + y + z = 13 & L'_2 \\ 0x - 7y - 3z = -63 & L'_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x + 3y + z = 30 & L'_1 \\ 0x + y + z = 13 & L'_2 \\ 0x + 0y + 4z = 28 & L'_3 + 7L'_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 \\ y = 13 - z = 13 - 7 = 6 \\ x = 30 - 3y - z = 30 - 18 - 7 = 5 \end{cases}$

$$S = \{(5\,;\,6\,;\,7)\}$$

b) $\begin{cases} 6x - 5y + 3z = 26 \\ x - 2y - 3z = -32 \\ 3x + 7y - 6z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -32 & L_1 \\ 6x - 5y + 3z = 26 & L_2 \\ 3x + 7y - 6z = 10 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x - 2y - 3z = -32 & L_1 \\ 0x + 7y + 21z = 218 & L_2 - 6L_1 \\ 0x + 13y + 3z = 106 & L_3 - 3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -32 & L'_1 \\ 0x + y + 3z = \dfrac{218}{7} & L'_2 \\ 0x + 13y + 3z = 106 & L'_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x - 2y - 3z = 30 & L'_1 \\ 0x + y + 3z = \dfrac{218}{4} & L'_2 \\ 0x + 0y - 36z = -\dfrac{2092}{7} & L'_3 - 13L'_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{2092}{7 \times 36} = \dfrac{523}{63} \\ y = \dfrac{218}{7} - 3z = \dfrac{218 \times 3 - 523}{21} = \dfrac{131}{21} \\ x = -32 + 2y + 3z \\ \quad = \dfrac{-32 \times 21 + 262 + 523}{21} = \dfrac{113}{21} \end{cases}$

$$S = \left\{ \left(\frac{113}{21}\,;\,\frac{131}{21}\,;\,\frac{523}{63} \right) \right\}$$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 15 \\ 5x + y - z = 31 \\ 7x - 2y - 5z = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 31 & L_1 \\ 2x + 3y - 4z = 15 & L_2 \\ 7x - 2y - 5z = 46 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5x + y - z = 31 & L_1 \\ -13x + 0y - z = -78 & L_2 - 3L_1 \\ 17x + 0y - 7z = 108 & L_3 + 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 31 & L'_1 \\ 13x + 0y + z = 78 & L'_2 \\ 17x + 0y - 7z = 108 & L'_3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5x + y - z = 31 & L_1' \\ 13x + 0y + z = 78 & L_2' \\ 108x + 0y + 0z = 654 & L_3' + 7L_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{654}{108} = \dfrac{109}{18} \\ z = 78 - 13z = \dfrac{78 \times 18 - 109 \times 3}{18} = -\dfrac{13}{18} \\ y = 31 - 5x + z \\ \quad = \dfrac{31 \times 18 - 5 \times 109 - 13}{18} = 0 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{109}{18} \,;\, 0 \,;\, -\frac{13}{18} \right) \right\}$$

EXERCICE 22

Soit x, y et z les trois parts en k€.

On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} 0,03x + 0,04y + 0,05z = 322,4 & L_1 \\ 0,04x + 0,05y + 0,04z = 377,92 & L_2 \\ x + y + z = 8\,448 & L_3 \end{cases}$$

$L_2 - 0,04L_3 :\ 0,01y = 40 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4\,000$

On remplace la valeur de y dans L_1 et L_3, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 0,03x + 0,05z = 162,4 & L_4 \\ x + z = 4\,448 & L_5 \end{cases}$$

$0,05L_5 - L_4 :\ 0,02x = 60 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\,000$

$L_5 :\ \ z = 4\,448 - x = 4\,448 - 3\,000 = 1\,448.$

Les trois parts du rentiers s'élèvent respectivement à 3 000 000 €, 4 000 000 € et 1 448 000 €

3 Calcul de dérivées

EXERCICE 23

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f en précisant le domaine de validité de vos calculs.

1) $D'_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$

2) $D'_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{2x - x - 1}{2x\sqrt{2}} = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

3) $D'_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$$= \frac{2x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2x^2} = \frac{\sqrt{x}(3x^2 - 1)}{2x^2}$$

4) $D'_f = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

5) $D'_f = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 6(3x-1)(1-2x)^3 - 6(3x-1)^2(1-2x)^2$

$$= 6(3x-1)(1-2x)^2(1-2x-3x+1) = 6(3x-1)(1-2x)^2(2-5x)$$

6) $D'_f = \mathbb{R}^*$, $\quad f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

7) $D'_f = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos(2x)$

8) $D'_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

9) $D'_f = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 3\cos x \sin^2 x$

10) $D'_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$

11) $D'_f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}$

12) $D'_f = \mathbb{R} - \{\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\cos x)(\cos x - \sin x) + \sin x(\sin x + \cos x)}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x + \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin x \cos x}{(1+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1+\cos x)^2} \end{aligned}$$