

Fiche sur les inégalités

1 Opérations sur les inégalités

- **Addition**

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad x < y \Leftrightarrow x + a < y + a \quad (\text{même sens})$$

- **Multiplication**

$$\forall k > 0, \quad x < y \Leftrightarrow kx < ky \quad (\text{même sens})$$

$$\forall k < 0, \quad x < y \Leftrightarrow kx > ky \quad (\text{sens contraire})$$

- **Inverse**

$$\forall x, y \text{ de même signe}, \quad x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \quad (\text{sens contraire})$$

- **Élever au carré**

$$\forall x > 0, y > 0, \quad x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \quad (\text{même sens})$$

- **Prendre la racine carrée**

$$\forall x > 0, y > 0, \quad x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y} \quad (\text{même sens})$$

- **Fonction monotone**

$$f \text{ croissante sur } I: \quad x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y) \quad (\text{même sens})$$

$$f \text{ décroissante sur } I: \quad x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y) \quad (\text{sens contraire})$$

- Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\frac{1}{3-x}$?

$$3 < x < 5 \xrightarrow{\times(-1)} -5 < -x < -3 \xrightarrow{+3} -2 < 3-x < 0 \xrightarrow{\uparrow(-1)} \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$$

- Comment montrer que pour tout $x > 1$, $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?

$$x > 1 \Rightarrow 0 < x^2 - 1 < x^2 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x^2 - 1} < x \xrightarrow{\uparrow(-1)} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{1}{x}$$

Rappels :

- On peut toujours **ajouter** membre à membre deux inégalités.
- On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités de termes **positifs**.
- ⚠ On ne peut pas soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités.

Encadrement de : $x - y$

On détermine d'abord un encadrement de $-y$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de x .

$$\text{Exemple : } \begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases} \Rightarrow -1 < x - y < 7.$$

Encadrement de $\frac{x}{y}$: (bornes de l'encadrement de x et y de même signe)

On détermine d'abord un encadrement de $\frac{1}{y}$, puis il faut s'arranger pour multiplier membre à membre deux encadrements dont tous les termes sont positifs.

Exemples :

$$1) \begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \frac{1}{4} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 < \frac{x}{y} < 3.$$

$$2) \begin{cases} -2 < x < -1 \\ 2 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -x < 2 \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} < -\frac{x}{y} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{3}$$

Méthode importante à connaître : (valable pour les fonctions et les suites)

Pour montrer que $A < B$, il est dans certains cas plus facile de calculer $A - B$, puis en étudiant son signe de montrer que $A - B < 0$.

Exemple : Comment montrer que si $x < 1$ alors $\frac{x-8}{2x-9} < 1$?

$$\text{Pour tout } x < 1, \quad \frac{x-8}{2x-9} - 1 = \frac{1-x}{2x-9} < 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} 1-x > 0 \\ 2x-9 < -7 \end{cases}$$

2 Inégalités classiques

Pour tout x réel : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Pour tout x réel : $e^x > 0$ et $e^x > x$