Compléments sur les nombres complexes - correction

I Révision terminale

EXERCICE 1

1) **Réponse c).** On pose $z = x + iy$, l'équation devient alors :

$$2x + 2iy + x - iy = 9 + i \quad \Leftrightarrow \quad 3x + iy = 9 + i$$

En identifiant, on a : $x = 3$ et $y = 1$ donc $z = 3 + i$

2) **Réponse c).** Comme $|z| = |\bar{z}|$ on a $|z + i| = |\overline{z + i}| = |\bar{z} - i|$ or

$|\bar{z} - i| \overset{\times|i|}{=} |i| \times |\bar{z} - i| = |i(\bar{z} - i)| = |i\bar{z} + 1|$

3) **Réponse b).** On a : $\bar{z} = re^{-i\theta}$ de plus $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,e^{i\,\frac{2\pi}{3}}$

On a donc : $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}} = \dfrac{2\,e^{i\,\frac{2\pi}{3}}}{re^{-i\theta}} = \dfrac{2}{r}\,e^{i\,(\frac{2\pi}{3}+\theta)}$

4) **Réponse b).** On a : $\left(\sqrt{3} + i\right)^n = \left[2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)\right]^n = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n\,e^{i\frac{n\pi}{6}}$

Or un complexe z est un imaginaire pur ssi $\arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

On a donc : $\dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \overset{\times\frac{6}{\pi}}{\Leftrightarrow} n = 3 + 6k$ comme $n \in \mathbb{N}$ alors $k \in \mathbb{N}$

5) **Réponse c).** $|z - i| = |z + 1| \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_A| = |z - z_B| \quad \Leftrightarrow \quad AM = BM$

donc l'ensemble des points M est la médiatrice de [AB].
$|i| = |-1| \Leftrightarrow OA = OB$ donc O est sur la médiatrice de [AB], l'ensemble des points M est donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

6) **Réponse c).**
$|z - 1 + i| = |3 - 4i| \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_\Omega| = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega M = 5$

M est donc sur le cercle de centre Ω de rayon 5, son affixe z est de la forme

$$z - z_\Omega = 5\,e^{i\theta} \quad \Leftrightarrow \quad z = z_\Omega + 5\,e^{i\theta} = 1 - i + 5\,e^{i\theta}$$

7) **Réponse a).** ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A ssi :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \quad \Leftrightarrow \quad z_C - z_A = i(z_B - z_A) \quad \Leftrightarrow \quad z_C = z_A + i(z_B - z_A)$$

On a donc : $z_C = 4 + i(3i - 4) = 4 - 3 - 4i = 1 - 4i$

8) **Réponse c).**

$$\frac{z-2}{z-1} = z \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0, \quad z-2 = z^2 - z \quad \Leftrightarrow \quad z \neq 0, \quad z^2 - 2z + 2 = 0$$

On calcule : $\Delta = 4 - 8 = -4 = (-2i)^2$ 2 solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

Exercice 2

On pose $z = 1 + i\sqrt{3}$. on a alors $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$z^n \in \mathbb{R}_+^* \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z^n) = k\,2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n\pi}{3} = k\,2\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 6k, \; k \in \mathbb{Z}.$$

z^n est réel positif si, et seulement si, n est un multiple de 6.

Exercice 3

1) $$f(z) = \frac{x+iy-i-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+i(y-1)}{(x+1)+iy}$$
$$= \frac{[(x-1)+i(y-1)][(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}$$
$$= \frac{x^2-1-iy(x-1)+i(y-1)(x+1)+y(y-1)}{(x+1)^2+y^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2-y-1+i(-xy+y+xy+y-x-1)}{(x+1)^2+y^2}$$
$$= \frac{x^2+y^2-y-1+i(2y-x-1)}{(x+1)^2+y^2}$$

2) $$f(z) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 2y - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

L'ensemble des points M est donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3) $$f(z) \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre B de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point A.

Exercice 4

1) On pose $\mathrm{A}(2+i)$ et $\mathrm{B}(-3-4i)$

$$|z-2-i| = |z+3+4i| \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_{\mathrm{A}}| = |z - z_{\mathrm{B}}| \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{AM} = \mathrm{BM}.$$

L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment [AB].

2) On pose $\mathrm{A}(-2i)$ et $\mathrm{B}(-2)$

$|\bar{z}-2i| = |z+2| \overset{|z|=|\bar{z}|}{\Leftrightarrow} |\overline{\bar{z}-2i}| = |z+2| \Leftrightarrow |z+2i| = |z+2| \Leftrightarrow$
$|z-z_\mathrm{A}| = |z-z_\mathrm{B}| \Leftrightarrow \mathrm{AM} = \mathrm{BM}$.

L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment [AB].

3) On pose $\mathrm{A}(1+i)$.

$$|(1+i)z-2i| = \left|(1+i)\left(z-\frac{2i}{1+i}\right)\right| = |1+i| \times \left|z-\frac{2i(1-i)}{2}\right| = \sqrt{2}|z-1-i|.$$

Donc $|(1+i)z-2i| = 2 \Leftrightarrow |z-1-i| = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |z-z_\mathrm{A}| = \sqrt{2}$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

II Équations du second degré à coefficients complexes

Exercice 5

1) a) $z_1 = 8i = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_2 = 2-2i\sqrt{3} = 4\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) Pour trouver une « *racines carrés* » des nombres complexes z_1 et z_2, on doit mettre z_1 et z_2 sous la forme $r^2\left(e^{i\theta}\right)^2$.

Si on appelle z_1' et z_2' les « racines carrées » respectives de z_1 et z_2.

$$z_1 = (2\sqrt{2})^2\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \Rightarrow z_1' = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2+2i$$

$$z_2 = 2^2\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^2 \Rightarrow z_2' = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}-i$$

2) On calcule Δ puis on utilise la question 1) b) pour trouver les solutions.

a) $\Delta = 4(2-i)^2 - 12(1-2i) = 4(4-4i-1) - 12 + 24i$
$= 16 - 16i - 4 - 12 + 24i = 8i = z_1 = (z_1')^2 = (2+2i)^2$

On obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{2(2-i)+2+2i}{2} = 3 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2(2-i)-2-2i}{2} = 1-2i$$

b) $\Delta = (1+i\sqrt{3})^2 - 4(-1+i\sqrt{3} = 1+2i\sqrt{3}-3+4-4i\sqrt{3} = 2-2i\sqrt{3}$
$= z_2 = (z_2')^2 = (\sqrt{3}-i)^2$

On obtient les solutions :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \text{et}$$

$$z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}-\sqrt{3}+i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

III Trigonométrie

EXERCICE 6

1) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

2) a) $1 + z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$.

$$|1+z|^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2(1+\cos\theta)$$

On introduit l'angle moitié : si $\theta \in]0\,;\,\pi[$ alors $\dfrac{\theta}{2} \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$1 + \cos\theta = 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad \text{avec } \cos\frac{\theta}{2} > 0$$

On en déduit alors $|1+z| = \sqrt{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$

Soit $\alpha = \arg(1+z)$, on a alors :
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1+\cos\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \cos\dfrac{\theta}{2} \\[2ex] \sin\alpha = \dfrac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \sin\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

On en déduit alors : $\arg(1+z) = \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi]$ et $1 + z = 2\cos\dfrac{\theta}{2}\, e^{\frac{\theta}{2}}$

b) Comme $\arg(z^2) = 2\arg(z) = 2\theta$, on a alors $1 + z^2 = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$.

$$Z = 1 + z + z^2 = (1+z^2) + z = 2\cos\theta\, e^{i\theta} + e^{i\theta} = e^{i\theta}(1 + 2\cos\theta)$$

- $\cos\theta > -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \theta < \dfrac{2\pi}{3}$ on a :

  $|Z| = 1 + 2\cos\theta$ et $\arg(Z) = \theta\ [2\pi]$

- $\cos\theta < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ on a :

  $|Z| = -1 - 2\cos\theta$ et $\arg(Z) = \theta + \pi\ [2\pi]$

IV Autour des formules d'Euler et de Moivre

EXERCICE 7

1) $$\cos a \cos b = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) = \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b} + e^{-i(a+b)}}{2} + \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\begin{aligned}\sin a\cos b &= \left(\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right) = \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}-e^{-i(a+b)}}{4i}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b}-e^{-i(a+b)}}{2i}+\frac{e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]\end{aligned}$$

2) a) On peut poser $a=\dfrac{p+q}{2}$ et $b=\dfrac{p-q}{2}$ $\Leftrightarrow$ $a+b=p$ et $a-b=q$

$$\begin{aligned}e^{i\left(\frac{p+q}{2}\right)}\times\left(2\cos\frac{p-q}{2}\right) &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}+2i\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\ &= 2\cos a\cos b+2i\sin a\cos b\\ &\overset{\text{d'après 1)}}{=} \cos(a+b)+\cos(a-b)+i[\sin(a+b)+\sin(a-b)]\\ &= \cos p+\cos q+i(\sin p+\sin q) = S+iS'\end{aligned}$$

b) On obtient alors : $S=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ et $S'=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

3) $$\begin{aligned}e^{i3x} &= (e^{ix})^3 = (\cos x+i\sin x)^3\\ &= \cos^3 x+3i\cos^2 x\sin x-3\cos x\sin^2 x-i\sin^3 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \operatorname{Re}(e^{i3x}) = \cos^3 x-3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x-3\cos x(1-\cos^2 x)\\ &= 4\cos^3 x-3\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \operatorname{Im}(e^{i3x}) = 3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x = 3(1-\sin^2 x)\sin x-\sin^3 x\\ &= 3\sin x-4\sin^3 x\end{aligned}$$

EXERCICE 8

1) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

2) $$\begin{aligned}e^{4x} &= (e^x)^4 = (\cos x+i\sin x)^4\\ &= \cos^4 x+4i\cos^3 x\sin x-6\cos^2 x\sin^2 x-4i\cos x\sin^3 x+\sin^4 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \operatorname{Re}(e^{4x}) = \cos^4 x-6\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x\\ &= \cos^4 x-6\cos^2 x(1-\cos^2 x)+(1-\cos^2 x)^2\\ &= \cos^4 x-6\cos^2 x+6\cos^4 x+1-2\cos^2 x+\cos^4 x\\ &= 8\cos^4 x-8\cos^2 x+1\end{aligned}$$

3) Si $X\in[-1\,;\,1]$, on peut poser $X=\cos x$ avec $x\in[0\,;\,\pi[$.

$8X^4-8X^2+1=0 \Leftrightarrow 8\cos^4 x-8\cos^2 x+1=0 \Leftrightarrow \cos 4x=0$

On a alors : $\begin{cases}4x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 4x=-\dfrac{\pi}{2}+k'2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{8}+k'\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

Pour $x\in[0\,;\,\pi[$, on retient pour $k\in\{0,1\}$ et $k'\in\{1,2\}$: $\dfrac{\pi}{8},\dfrac{5\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{7\pi}{8}$

Les solutions sont alors : $S=\left\{\cos\dfrac{\pi}{8}\,;\,\cos\dfrac{3\pi}{8}\,;\cos\dfrac{5\pi}{8}\,;\,\cos\dfrac{7\pi}{8}\right\}$

EXERCICE 9

Un classique

1) a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$

b) On rappelle que $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$$2i\sin\frac{\theta}{2} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = 2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$= i\sin\theta - 2\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right) = \cos\theta + i\sin\theta - 1 = e^{i\theta} - 1$$

2) a) $\displaystyle S_1 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) + i\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$

$$= \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$
$$\overset{1)\ b)}{=} \frac{2i\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\, e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{2i\sin\dfrac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times e^{\frac{n\theta}{2}}$$

b) $S_1 = \mathrm{Re}(S_1 + iS_2) = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times \cos\dfrac{n\theta}{2}$

$S_2 = \mathrm{Im}(S_1 + iS_2) = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \times \sin\dfrac{n\theta}{2}$

EXERCICE 10

Linéarisation

1) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

2) À l'aide des formule d'Euler :

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$
$$= \frac{e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2} + 4\times\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} + 3\right]$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$$

3) On rappelle que $\displaystyle\int \cos nx = \frac{\sin nx}{n}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= (0 + 0 + \frac{3\pi}{16}) - (0+0+0) = \frac{3\pi}{16}$$

V Transformation de $a \cos x + b \sin x$

EXERCICE 11

On rappelle que $\quad a\cos x + b\sin x = \text{Re}\left[e^{ix}(a-ib)\right]$

1) $e^{ix}(1+i\sqrt{3}) = e^{ix}\times 2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{ix}\times 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\,e^{i\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$

$\cos x - \sqrt{3}\sin x = \text{Re}\left[2\,e^{i\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right] = 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

2) $e^{ix}(1+i) = e^{ix}\times\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{ix}\times\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$

$5\cos x - 5\sin x = 5\times\text{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right] = 5\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

3) $e^{i3x}(1-i) = e^{i3x}\times\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{i3x}\times\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$\cos 3x + \sin 3x = \text{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{i\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \sqrt{2}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

4) $e^{i2x}(3+i\sqrt{3}) = e^{i2x}\times 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = e^{i2x}\times 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}\,e^{i\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$3\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \text{Re}\left[2\sqrt{3}\,e^{i\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}\right] = 2\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

5) $e^{i4x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3}i\right) = e^{i4x}\times\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right) = e^{i4x}\times\dfrac{2}{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2}{3}\,e^{i\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos 4x - \dfrac{1}{3}\sin 4x = \text{Re}\left[\dfrac{2}{3}\,e^{i\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}\right] = \dfrac{2}{3}\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

6) $e^{i\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}(1-i) = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\times\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\times\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}-x\right)}$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right) = \text{Re}\left[\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}-x\right)}\right] = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}-x\right)$

EXERCICE 12

$\cos x(\cos x-\sin x) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2 x - \sin x\cos x = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{2} = 1$

$\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x) = \dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow\quad \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}$

On obtient les solutions : $\begin{cases} 2x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{cases}$

Les solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $\; -\dfrac{\pi}{4}, 0, \dfrac{3\pi}{4}, \pi$

EXERCICE 13

Interprétation géométrique de $a\cos x + b\sin x$

1) $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = a\cos x + b \sin x$

2) En projetant $\overrightarrow{OM}$ sur $\overrightarrow{w}$, on obtient :
$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{OM} = ||\overrightarrow{w}|| \times ||\overrightarrow{OM}|| \cos\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OM}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$.

On a donc $a\cos x + b\sin x = r\cos(x-\varphi)$

VI Autour de la racine *n*-ième de l'unité

Exercice 14

a) $e^{\frac{2k\pi}{n}} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2k\pi}{n} = \pi \Leftrightarrow n = 2k$. n doit être pair.

b) $e^{\frac{2k\pi}{n}} = i \Leftrightarrow \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow n = 4k$. n doit être un multiple de 4.

c) $e^{\frac{2k\pi}{n}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 3n = 8k$.

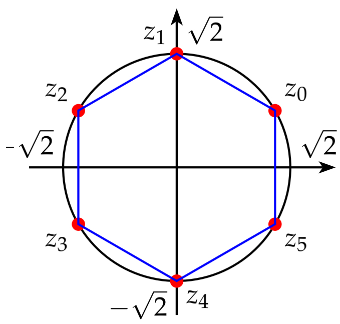
8 divise $3n$, comme 3 et 8 sont premiers entre, d'après le théorème de Gauss, 8 divise n. Donc n doit être un multiple de 8.

d) $e^{\frac{2k\pi}{n}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow n = 6k$. n doit être un multiple de 6.

Exercice 15

1) $z^6 = -8 \Leftrightarrow |z|^6 = 8$ et $6\arg(z) = \pi + 2k\pi$
$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$
Il y a donc 6 angles distincts correspond aux valeurs de k dans $[\![0\,;\,5]\!]$

2) On obtient le graphe suivant avec les arguments : $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}$



3) Pour avoir des polynômes à coefficients réels, ils faut regrouper les solutions complexes conjuguées. Soit (z_0, z_5), (z_1, z_4) et (z_2, z_3).

$$\begin{aligned}
z^6+8 &= [(z-z_0)(z-z_5)][(z-z_1)(z-z_4)][(z-z_2)(z-z_3)]\\
&= (z^2-(z_0+z_5)z+z_0z_5)(z^2-(z_1+z_4)z+z_1z_4)(z^2-(z_2+z_3)z+z_2z_3)\\
&= (z^2-2\mathrm{Re}(z_0)+|z_0|^2)(z^2-2\mathrm{Re}(z_1)+|z_1|^2)(z^2-2\mathrm{Re}(z_2)+|z_2|^2)\\
&= (z^2-\sqrt{2}\sqrt{3}\,z+2)(z^2+0z+2)(z^2+\sqrt{2}\sqrt{3}\,z+2)\\
&= (z^2-\sqrt{6}\,z+2)(z^2+2)(z^2+\sqrt{6}\,z+2)
\end{aligned}$$

EXERCICE 16

1) $z^3=i \quad\Leftrightarrow\quad |z|^3=1 \text{ et } 3\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

$\Leftrightarrow\quad |z|=1 \text{ et } \arg(z)=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k2\pi}{3}$

Il y a donc 3 angles distincts correspondant aux valeurs de k dans $[\![0\,;\,2]\!]$

$S=\left\{e^{i\frac{\pi}{6}}\,;\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\,;\,e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\}$

2) $z^4-z^3+z^2-z+1$ est la somme des 5 premiers termes d'une suite géométrique de raison $(-z)$ et de premier terme 1 donc avec $z\neq -1$

$z^4-z^3+z^2-z+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1-(-z)^5}{1+z}=0 \quad\Leftrightarrow\quad z^5=-1$

$z^5=-1 \quad\Leftrightarrow\quad |z|^5=1 \text{ et } 5\arg(z)=\pi+2k\pi$

$\Leftrightarrow\quad |z|=1 \text{ et } \arg(z)=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{k2\pi}{5}$

Il y a donc 5 angles distincts correspondant aux valeurs de k dans $[\![0\,;\,4]\!]$

$S=\left\{e^{i\frac{\pi}{5}}\,;\,e^{i\frac{3\pi}{5}}\,;\,-1\,;\,e^{i\frac{7\pi}{5}}\,;\,e^{i\frac{9\pi}{5}}\right\}$

3) $(z-i)^4=(z+i)^4 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4=1$

On pose $Z=\dfrac{z-i}{z+i}$, l'équation devient $Z^4=1$

On trouve alors 4 solutions : $1\,,\,i\,,\,-1\,,\,-i$.

On revient à z :

- $\dfrac{z-i}{z+i}=1 \quad\Leftrightarrow\quad z-i=z+i \quad\Leftrightarrow\quad 0z=2i$ impossible
- $\dfrac{z-i}{z+i}=i \quad\Leftrightarrow\quad z-i=iz-1 \quad\Leftrightarrow\quad z(1-i)=i-1 \quad\Leftrightarrow\quad z=-1$
- $\dfrac{z-i}{z+i}=-1 \quad\Leftrightarrow\quad z-i=-z+i \quad\Leftrightarrow\quad z=0$
- $\dfrac{z-i}{z+i}=-i \quad\Leftrightarrow\quad z-i=-iz+1 \quad\Leftrightarrow\quad z(1+i)=1+i \quad\Leftrightarrow\quad z=1$

Il y a donc 3 solutions $S=\{-1\,;\,0\,;\,1\}$

4) La somme des racines 5-ième de l'unité est nulle donc :

$$1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$1+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}\right)+\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}\right)=0 \quad\overset{\text{Euler}}{\Leftrightarrow}\quad 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\cos^2\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{2\pi}{5}-1=0$$

On pose $X=\cos\frac{2\pi}{5}$ avec $X>0$, l'équation devient :

$4X^2+2X-1=0$, on calcule $\Delta=4+16=20=(2\sqrt{5})^2$,

La racine positive est $X=\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

EXERCICE 17

Construction d'un pentagone régulier

1) $1+2a+2b=0$ voir exo précédent.

2) De la transformation produit somme : $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$

$$\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos-\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

On a donc $ab=\frac{1}{2}(a+b)$

$$1+2a+2b=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(a+b)=-1 \quad\Leftrightarrow\quad a+b=-\frac{1}{2}$$

On en déduit alors que $ab=\frac{1}{2}(a+b)=-\frac{1}{4}$

a et b sont alors solutions de $X^2-(a+b)X+ab=0 \quad\Leftrightarrow\quad X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}=0$

Comme $a>0$ et $b<0$ on obtient : $a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $b=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

3) Soit les points $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{4}\,;\,0\right)$ et $\mathrm{B}\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$

On a alors $\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AB a pour équation : $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{5}{16}$

$\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses pour $y=0$, on trouve alors deux points C_1 et C_2 d'intersection d'abscisses respectives :

$$x_1+\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{5}}{4} \quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=a$$

$$x_2 + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} = b.$$

On obtient alors les points d'intersection avec $\mathscr{C}$ en traçant les perpendiculaires à l'axe des abscisses en C_1 et C_2.

Exercice 18

1) Les racines 4-ième de l'unité sont : $1, i, -1, -i$.

2) $(1-2i)^4 = 1 - 4(2i) + 6(2i)^2 - 4(2i)^3 + (2i)^4 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16$
$= -7 + 24i$.

3) $z^4 = -7 + 24i \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = (1-2i)^4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{z}{1-2i}\right)^4 = 1.$

On utilisant les racines 4-ième de l'unité, on obtient les 4 solutions suivantes :

- $\dfrac{z}{1-2i} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - 2i$
- $\dfrac{z}{1-2i} = i \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 + i$
- $\dfrac{z}{1-2i} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = -1 + 2i$
- $\dfrac{z}{1-2i} = -i \quad \Leftrightarrow \quad z = -2 - i)$

VII Écriture complexe d'une transformation

Exercice 19

1) Translation de vecteur $\vec{u}(3-i)$
2) Homothétie de centre O et de rapport $k = 5$
3) Réflexion d'axe (Ox).
4) Symétrie de centre O.
5) Quart de tour direct de centre O.
6) Réflexion d'axe (Oy).
7) Quart de tour indirect de centre O.
8) Rotation de centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
9) $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z$. Rotation de centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
10) Rotation de centre O et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.
11) $z' - i = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - i)$. Rotation de centre A$(i)$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{6}$