Composition de fonctions, dérivées successives et fonction réciproque

Table des matières

1 Dérivée de la composée

1.1 Définition

Définition 1 : Fonction composée de f par g

Soit les fonctions f et g définies respectivement sur D_f et D_g tel que $f\left(D_f\right) \subset D_g$.
On appelle $g \circ f$ définie sur D_f par : $g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$

Remarque : Cela revient à appliquer successivement la fonction f et la fonction g.

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y) = g\left[f(x)\right] = g \circ f(x)$$

Cela nécessite la condition $f\left(D_f\right) \subset D_g$, i.e. : $\forall x \in D_f,\ f(x) \in D_g$.

Il faut donc parfois réduire l'ensemble D_f pour avoir cette condition. Par exemple, soit les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = x+3$ et $g(x) = \ln x$. La fonction $g \circ f$ est telle que $g \circ f(x) = \ln(x+3)$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais comme on applique ensuite la fonction ln, il est nécessaire d'avoir $f(x) > 0$, soit $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$.
On réduit donc D_f à $]-3\,;+\infty[$

⚠ La composée de deux fonctions n'est pas une opération commutative. En effet dans la plupart des cas $g \circ f \neq f \circ g$ comme sur l'exemple suivant :

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2$ et $g(x) = 4x + 3$.
Les deux fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$, les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont donc aussi définies sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$g \circ f(x) = g\left(x-2\right) = 4(x-2) + 3 = 4x - 5$$
$$f \circ g(x) = f\left(4x+3\right) = (4x+3) - 2 = 4x + 1$$

Exemple : Décomposer les fonctions f_1, f_2 et f_3 suivantes en fonctions élémentaires en précisant leur ensemble de définition :

$$f_1(x) = \frac{1}{3x-1} \qquad f_2(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad f_3(x) = \ln(e^x + 2)$$

- f_1 est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ et l'on décompose $f_1 = h \circ g$ avec :

$$g(x) = 3x - 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

- f_2 est définie sur $[-2\,;\,2]$ et l'on décompose $f_2 = k \circ h \circ g$ avec :

$$g(x) = x^2 \qquad h(x) = 4 - x \qquad \text{et} \qquad k(x) = \sqrt{x}$$

- f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on décompose $f_3 = k \circ h \circ g$ avec :

$$g(x) = e^x \qquad h(x) = x + 2 \qquad \text{et} \qquad k(x) = \ln x$$

Remarque : La composition de fonctions est une opération associative :
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

1.2 Variation d'une fonction composée

Théorème 1 : Soit les fonctions f et g définies respectivement sur I et $f(\mathrm{I})$.

- Si f et g ont **même variation** resp.t sur I et $f(\mathrm{I})$ alors la fonction $g \circ f$ est **croissante** sur I.
- Si f et g ont des **variations opposés** resp. sur I et $f(\mathrm{I})$ alors la fonction $g \circ f$ est **décroissante** sur I.

Démonstration : Nous ferons la démonstration pour une fonction f croissante sur I et une fonction g décroissante sur $f(\mathrm{I})$.

f est croissante sur I : $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ \ x_1 < x_2 \ \ \Rightarrow \ \ f(x_1) < f(x_2)$

g est décroissante sur $f(\mathrm{I})$:

$$\forall f(x_1), f(x_2) \in f(\mathrm{I}),\ \ f(x_1) < f(x_2) \ \ \Rightarrow \ \ g[f(x_1)] > g[f(x_2)]$$

On a donc : $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I},\ \ x_1 < x_2 \ \ \Rightarrow \ \ g[f(x_1)] > g[f(x_2)]$

La fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $]-\infty; 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.
2) Déterminer les variations de h.

$\Rightarrow \Rightarrow$

1) La fonction h se décompose en $g \circ f$, avec : $f(x) = 1 - x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

2) On sait que la fonction :
   - f est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et $f(]-\infty\,;\,1]) = [0\,;+\infty[$
   - g est croissante sur $[0\,;+\infty[$

   d'après le théorème des fonctions composées, h est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$

⚠ Il n'est donc pas nécessaire pour ce cas particulier de déterminer le signe de la dérivée pour connaître les variations de la fonction h.

1.3 Le théorème

Théorème 2 : Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

Soit la fonction f définie sur I par : $f = v \circ u$

La fonction f est dérivable sur I et : $f' = u' \times v' \circ u$.

Démonstration : Soit a un point de I et x un point de I du voisinage de a. Calculons le taux de variation de la fonction f en a.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{v\circ u(x)-v\circ u(a)}{x-a}=\frac{v[u(x)]-v[u(a)]}{u(x)-u(a)}\times\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$$

On pose $X=u(x)$ et $A=u(a)$, on a donc :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{v(X)-v(A)}{X-A}\times\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$$

Sur I la fonction u est continue car dérivable, donc $\lim\limits_{x\to a}X=\lim\limits_{x\to a}u(x)=u(a)=A$.

Comme u et v sont dérivables respectivement sur I et J, on passe à la limite :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to A}\dfrac{v(X)-v(A)}{X-A}=v'(A)\\[2ex]\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)-u(a)}{x-a}=u'(a)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Par produit, on a :}\\[1ex]\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=u'(a)\times v'(A)\end{array}$$

La fonction f est dérivable en tout point de I, comme $A=u(a)$, on a alors :

$$f'=u'\times v'\circ u.$$

1.4 Applications

- Déterminer la dérivée de la fonction $f(x)=\cos\left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)$

  On décompose la fonction f en : $\begin{cases}u(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}\\ v(x)=\cos x\end{cases}$

  La fonction u est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
  La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. On dérive alors la fonction f :

$$\begin{aligned}f'(x)=u'(x)\times v'\circ u(x)&=\frac{(2x+1)-2(x-1)}{(2x+1)^2}\times\left[-\sin\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\right]\\&=\frac{-3}{(2x+1)^2}\sin\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\end{aligned}$$

- Soit la fonction f définie pour tout $x\neq1$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

  a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

  b) En déduire la dérivée des fonctions g et h suivantes :

$$g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}\quad\text{et}\quad h(x)=\frac{x^4+1}{x^2-1}$$

  a) On dérive la fonction f : $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

b) On décompose alors les fonctions g et h à l'aide de la fonction f et d'une autre fonction élémentaire.

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})^2+1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^4+1}{x^2-1} = \frac{(x^2)^2+1}{(x^2)-1}$$

On pose alors les fonctions u et v définies par : $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2$

On a donc : $g = f \circ u$ et $h = f \circ v$

Ensembles de dérivation :
g est dérivable sur $]0\,;\,1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\,;\,1\}$

On dérive alors les fonctions g et h, à l'aide de la composée de fonctions :

$$g'(x) = u'(x) \times f' \circ u(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$h'(x) = v'(x) \times f' \circ u(x) = 2x \times \frac{(x^2)^2 - 2(x^2) - 1}{((x^2)-1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^2-1)^2}$$

2 Dérivées successives

2.1 Définition

Définition 2 : Soit une fonction f dérivable sur $\mathscr{D}$. Sa fonction dérivée f' est appelé dérivée première (ou d'ordre 1) de la fonction f sur $\mathscr{D}$.

Lorsque f' est elle-même dérivable sur $\mathscr{D}$, sa fonction dérivée, notée f'', est appelé dérivée seconde (ou d'ordre 2) de la fonction f.

Par itération, pour tout naturel $n \geqslant 2$, on définit la fonction dérivée n-ième (ou d'ordre n), notée $f^{(n)}$ comme étant la fonction dérivée de la fonction dérivée d'ordre $(n-1)$, soit :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

Exemple : Déterminer les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 des fonctions suivantes :

- $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad , \quad f''(x) = 6x - 4 \quad , \quad f^{(3)}(x) = 6$$

- $g(x) = \cos 2x + \sin 2x$

$$g'(x) = -2\sin 2x + 2\cos 2x \quad , \quad g''(x) = -4\cos 2x - 4\sin 2x = -4\,g(x)$$

$$g^{(3)}(x) = 8\sin 2x - 8\cos 2x = -4\,g'(x)$$

2.2 Relation de récurrence

Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1)$

a) Calculer les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4. En déduire une conjecture quant à la la dérivée d'ordre n.

b) Démontrer par récurrence cette conjecture.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\qquad f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ $\qquad f^{(3)}(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{2\times 3}{(x+1)^4}$

On s'aperçoit que les dérivées successives ont alternativement un signe « + », quand l'ordre de la dérivée est impair, et un signe « − », quand l'ordre de la dérivée est pair. La puissance au dénominateur augmente de 1 à chaque fois que l'on dérive. La puissance est liée à l'ordre de la dérivée. Le coefficient du numérateur est quant à lui multiplié, à chaque dérivation, par la puissance du dénominateur. On peut raisonnablement conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(x+1)^n}$$

b) Soit la propriété $\mathscr{P}_n$, pour $n \geqslant 1$: $f^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(x+1)^n}$

Initialisation : Pour $n = 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(-1)^0\,0\,!}{(x+1)}$. La proposition $\mathscr{P}_1$ est vérifiée. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $f^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(x+1)^n}$, montrons alors que $f^{(n+1)} = \dfrac{(-1)^n\,n!}{(x+1)^{n+1}}$

On rappelle que $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n}{u^{n+1}}$

Si l'on dérive $f^{(n)}$, on obtient alors :

$$f^{(n+1)} = -\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\times n}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n\,n!}{(x+1)^{n+1}}$$

La proposition est héréditaire.

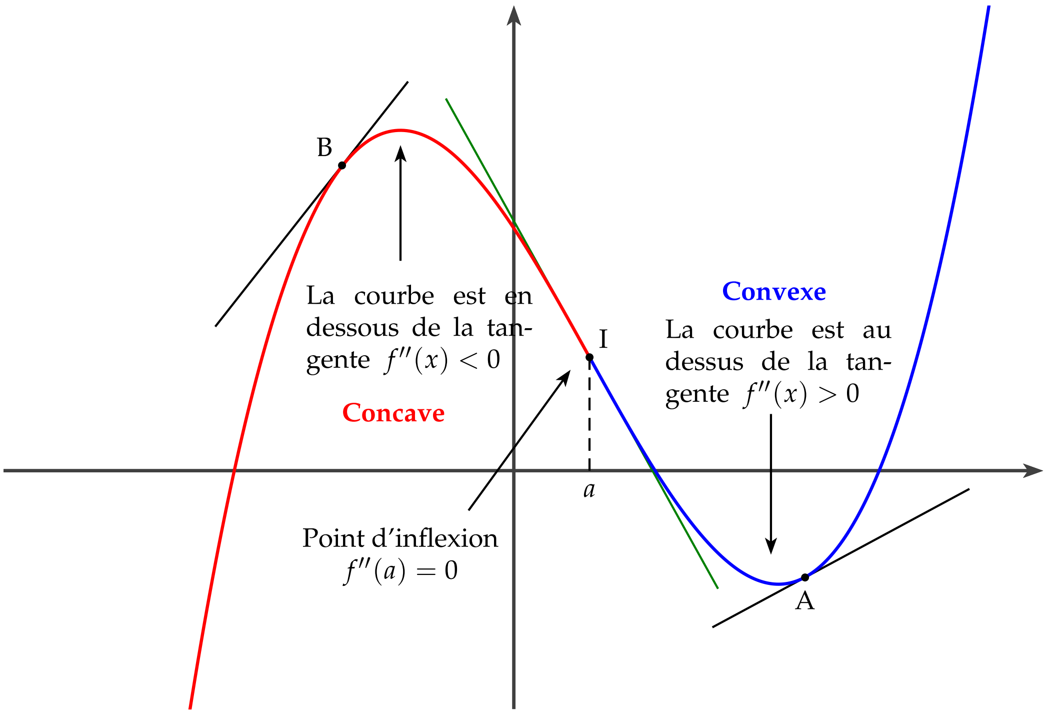
Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(x+1)^n}$

2.3 Interprétation de la dérivée seconde

Définition 3 : Lorsque la dérivée seconde f'' d'une fonction f est positive sur I, la fonction dérivée f' est alors croissante. La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est alors toujours au dessus de sa tangente en un point quelconque de I. On dit alors que la courbe $\mathscr{C}_f$ est **convexe**.

Dans le cas où la dérivée seconde est négative, la fonction dérivée f' est alors décroissante. La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors toujours au dessous de sa tangente, la courbe $\mathscr{C}_f$ est dites **concave**.

Lorsque la dérivée seconde s'annule en $x = a$, la courbe possède au point A d'abscisse $x = a$ un **point d'inflexion**, c'est à dire que d'un côté du point A la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente et de l'autre côté en dessous.



3 Dérivée de la fonction réciproque

3.1 Fonction réciproque d'une fonction monotone

Théorème 3 : Soit une fonction f monotone de I dans $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$. La fonction f définit alors une bijection de I sur J. La fonction f admet alors une fonction réciproque, notée f^{-1}, monotone de J dans I telle que :

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

Exemple :

- La fonction carrée est monotone (croissante) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
  Elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui est la fonction racine carrée.
- La fonction exp est monotone (croissante) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
  Elle admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui est la fonction ln.
- La fonction sinus est monotone (croissante) de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;\,1]$.
  Elle admet donc une fonction réciproque de $[-1\,;\,1]$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ qui est la fonction arcsin ou $\sin^{-1}$.

Propriété 1 : On a les relations suivantes :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathrm{J},\ f \circ f^{-1}(x) = x$$

Exemple : On retrouve ces relations avec les fonctions exp et ln, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln e^x = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln x} = x$$

⚠ Il faut faire attention aux ensembles sur lesquelles ces relations sont définies.

Théorème 4 : Soit une fonction f monotone de I dans $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$.
Les fonctions f et f^{-1} ont même variation respectivement sur I et J.

Démonstration : Dans le cas où f est croissante sur I.

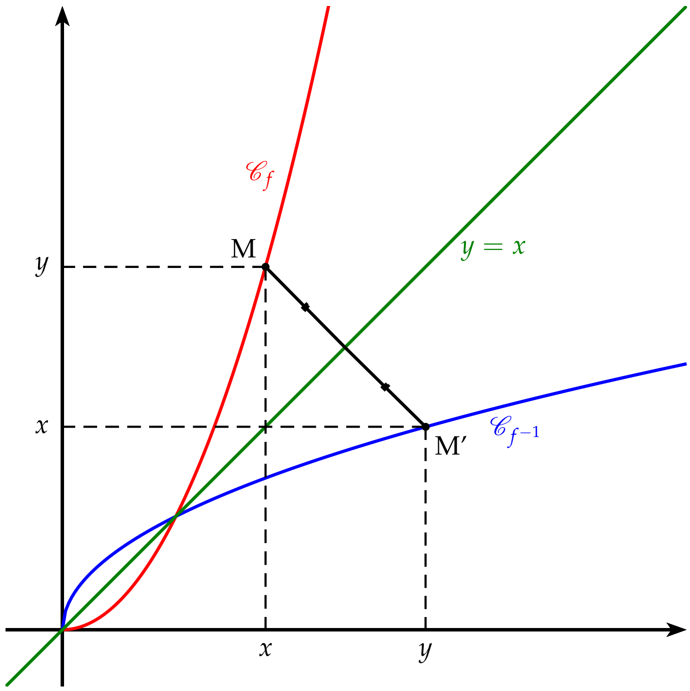
Raisonnons par l'absurde. Supposons que f^{-1} est décroissante sur J. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall y_1, y_2 \in \mathrm{J},\ y_1 < y_2 \ &\Rightarrow\ f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) \overset{f \text{ croissante}}{\Rightarrow} f \circ f^{-1}(y_1) > f \circ f^{-1}(y_2)\\ &\Rightarrow\ y_1 > y_2\end{aligned}.$$

Cela est contradictoire donc f^{-1} est croissante sur J.

3.2 Représentation graphique

Propriété 2 : La représentation graphique de la fonction f^{-1} est symétrique, par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$), à la représentation de la fonction f.



3.3 Dérivabilité

Théorème 5 : Soit la fonction f monotone et dérivable de I dans $f(\mathrm{I}) = \mathrm{J}$ et si $f'(x) \neq 0$ sur I, alors sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable de J dans I et :

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

⚠ L'hypothèse $f'(x) \neq 0$ est importante en raison du dénominateur pour $\left(f^{-1}\right)'$

Exemple :

- On retrouve la dérivée de la fonction ln en connaissant uniquement la fonction exp. Comme la fonction ln est la réciproque de la fonction exp, on a alors :
$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp' \circ \ln(x)} = \frac{1}{\exp \circ \ln(x)} = \frac{1}{x}$$
- Soit la fonction sin qui est croissante de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1 ; 1]$. Elle admet une fonction réciproque, arcsin, croissante de $[-1 ; 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

  La fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin' = \cos$ qui est strictement positif de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1 ; 1[$.

  La fonction arcsin est donc dérivable sur $]-1 ; 1[$ et :
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos \circ \arcsin(x)} \overset{*}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2[\arcsin(x)]}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
  * car $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et comme $\cos x > 0$, on a : $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$