Compléments sur l'intégration et les primitives

Table des matières

1 Calculs de primitives

La liste de recherche de primitives n'est pas exhaustive. Dans les exercices, la procédure sera indiquée.

1.1 Décomposition en éléments simples

Définition 1 : Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle.

Toute fonction rationnelle f (polynôme sur polynôme) peut se décomposer de façon unique en la somme :

- d'une partie entière : un polynôme ;
- de fractions de type : $\dfrac{a_i}{(x-\alpha)^i}$ (éléments simples de 1re espèce) ;
- de fractions de type : $\dfrac{a_i x + b_i}{[(x-\alpha)^2+\beta]^i}$ (éléments simples de 2e espèce).

Remarque : Nous prendrons des exemples uniquement avec des fractions de première espèce. La seconde espèce sera vue en première année de supérieur.

- Soit la fonction rationnelle définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

  On observe que la forme de f ne correspond à aucune forme du tableau des primitives. Pour trouver une primitive de la fonction f, on décompose f en « *éléments simples* » :

  $$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

  On a alors une forme connue. Sur $]1;+\infty[$, on obtient une primitive :

  $$F(x) = x + \ln|x-1| = x + \ln(x-1)$$

- Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$

  1) Montrons que l'on peut décomposer la fonction en éléments simples, soit de la forme :

  $$f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

  On réduit cette forme puis on identifie à la première :

  $$\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2+b(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

  $$= \frac{(a+b)x^2+2(a-b)x+a+b}{(x^2-1)^2}$$

  On obtient alors le système suivant :

  $$\begin{cases} a+b=1 \\ 2(a-b)=1 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

On a donc : $f(x) = \dfrac{3}{4(x-1)^2} + \dfrac{1}{4(x+1)^2}$

2) On obtient donc une primitive de f : $F(x) = -\dfrac{3}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)}$

- Soit la fonction f définie sur $]4\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 13x^2 - 27x + 8}{x^2 - 2x - 8}$

1) Déterminons la partie entière par une division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +x^3 & -13x^2 & -27x & +8 & x^2 - 2x - 8 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & +8x^2 & & & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{1-3}
0x^4 & +3x^3 & -5x^2 & -27x & & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & +24x & & \\ \cline{2-4}
 & 0x^3 & +x^2 & -3x & +8 & \\
 & & -x^2 & +2x & +8 & \\ \cline{3-5}
 & & 0x^2 & -x & +16 &
\end{array}$$

On obtient alors : $f(x) = x^2 + 3x + 1 + \dfrac{-x+16}{x^2 - 2x - 8}$

2) Factorisation du dénominateur :

$x^2 - 2x - 8 = 0$ on a : $\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$

$\Delta > 0$, 2 racines réelles : $x_1 = \dfrac{2+6}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{2-6}{2} = -2$

On obtient ainsi : $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

3) Décomposition en éléments simples de : $\dfrac{-x+16}{(x-4)(x+2)}$.

On cherche a et b tels que : $\dfrac{-x+16}{(x-4)(x+2)} = \dfrac{a}{x-4} + \dfrac{b}{x+2}$

or $\dfrac{a}{x-4} + \dfrac{b}{x+2} = \dfrac{x(a+b) + 2a - 4b}{(x-4)(x+2)}$

Par identification, on trouve le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a - 4b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ a - 2b = 8 \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3b = -9 \\ a = -1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

On obtient alors : $f(x) = x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2}{x-4} - \dfrac{3}{x+2}$

4) On obtient donc une primitive de f :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 2\ln(x-4) - 3\ln(x+2)$$

1.2 Reconnaître la forme d'une dérivée

- Il faut parfois penser à la dérivation du produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

  Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + x \cos x$

  La fonction comporte deux parties qui peuvent s'analyser comme la somme du produit de la dérivée de x par $\sin x$ et du produit de x par la dérivée de $\sin x$. La primitive est alors :
  $$F(x) = x \sin x.$$
  qui si on la dérive donne : $F'(x) = \sin x + x \cos x$

- De manière identique, on peut penser à la dérivation du quotient :
  $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$
  Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

  On peut alors poser : $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$, on a alors
  $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$
  On a donc :
  $$F(x) = \frac{\ln x}{x}$$

2 Intégration par partie

2.1 Le principe

Théorème 1 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I. Alors :

$$\int_a^b uv'(x)\,\mathrm{d}x = \left[uv(x)\right]_a^b - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : Si u et v sont dérivables sur I, alors le produit l'est également.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \Rightarrow \quad uv' = (uv)' - u'v$$

Comme u' et v' sont continues, on peut donc intégrer, on obtient donc :

$$\int_a^b uv'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[(uv)'(x) - u'v(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} &= \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[uv(x)\right]_a^b - \int_a^b u'v(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2.2 Exemples

1) **Calcul d'intégrale.** Calculer : $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x$

On ne peut trouver une primitive car on ne retrouve pas la forme $u'e^u$. Il faudrait qu'il n'y ait pas le x devant l'exponentielle. On intègre par partie en posant :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x &= \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \\ &= \Big[xe^x\Big]_0^1 - \Big[e^x\Big]_0^1 = (e-0) - (e-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

2) **Calcul de primitive.** Déterminer une primitive de $\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit F la primitive de ln qui s'annule en 1. On a alors :

$$F(x) = \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$$

Comme la primitive de ln n'est pas connue, on décompose $\ln t$ en :

$$\ln t = 1 \times \ln t$$

on pose alors :

$$u(t) = \ln t \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v'(t) = 1 \qquad v(t) = t$$

On a alors :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[t \ln t\Big]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = \Big[t \ln t\Big]_1^x - \Big[t\Big]_1^x \\ &= x \ln x - x + 1\end{aligned}$$

Si l'on cherche la primitive G de $\ln x$ avec une constante d'intégration nulle :

$$G(x) = x \ln x - x$$

3) **Double intégration par partie.**
Calculer la primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1 de $f(x) = (1+x)^2 e^{2x}$

On a alors : $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^x (1+t)^2 e^{2t} \, \mathrm{d}t$.

On cherche à faire disparaître le polynôme devant l'exponentielle.

$$u(t) = (1+t)^2 \qquad u'(t) = 2(1+t)$$
$$v'(t) = e^{2t} \qquad v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$$

On obtient alors :
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{x} (1+t)^2 e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}(1+t)^2 e^{2t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} (1+t)e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - \int_{-1}^{x} (1+t)e^{2t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{x} (1+t)e^{2t}\,\mathrm{d}t$.

Pour calculer I, on fait de nouveau une intégration par partie, on pose alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1+t) & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{2t} & v(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} \end{aligned}$$

On obtient alors :
$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \left[\frac{1}{2}(1+t)e^{2t}\right]_{-1}^{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

On obtient finalement pour F,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - \mathrm{I} \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(2+4x+2x^2-2-2x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

3 Intégration par changement de variable

3.1 Principe

Théorème 2 : Soit une fonction φ dérivable et de dérivée continue sur $\mathrm{I} = [a\,;\,b]$ et une fonction f continue sur J telles que $\varphi(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

$$\forall a, b \in \mathrm{I}, \quad \int_a^b f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : La fonction f est continue sur J donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, f admet une primitive F sur J et comme φ est dérivable et de dérivée continue, la fonction $(F\circ\varphi)' = \varphi' \times f\circ\varphi$ est continue sur I. D'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $(F\circ\varphi)'$ admet alors une primitive, d'où :

$$\int_a^b f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \left[F\circ\varphi(t)\right]_a^b = F[\varphi(a)] - F[\varphi(b)] = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Formellement : on remplace x par $\varphi(t)$ et $\mathrm{d}x$ par la différentielle $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ de la fonction φ en prenant garde de changer les bornes.

Pratiquement : pour calculer une intégrale par changement de variable, nous le ferons **uniquement** que si la fonction φ est bijective, strictement monotone et dérivable et seulement dans ce cas.

On veut calculer $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t)$, on doit alors calculer les nouvelles bornes avec la fonction φ^{-1} (bijective) :

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

3.2 Exemples

1) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

On peut penser à la relation $\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \iff \cos^2 t = 1 - \sin^2 t$

On pose $x = \sin t$ et comme $x \in [0\,;\,1]$ on peut prendre $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction sin est bijective et monotone de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0\,;1]$.

$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$ et $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}(\cos t\,\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(\cos t\,\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - 0 - 0\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2) Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x}} \quad \text{on pourra poser } x = \frac{1}{t}$$

Soit F une primitive de f, on a alors : $F(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x}}$

La fonction inverse est bijective et monotone de $]0\,;+\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$.

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{d'où } F(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}}} = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t}}$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \overset{\int}{\Rightarrow} 2\sqrt{u}, \quad \text{on a alors} \quad \frac{-1}{\sqrt{1+2t}} = -\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{1+2t}} \overset{\int}{\Rightarrow} -\sqrt{1+2t}$$

On revient alors à l'ancienne variable : $-\sqrt{1+2t} = -\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = -\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$

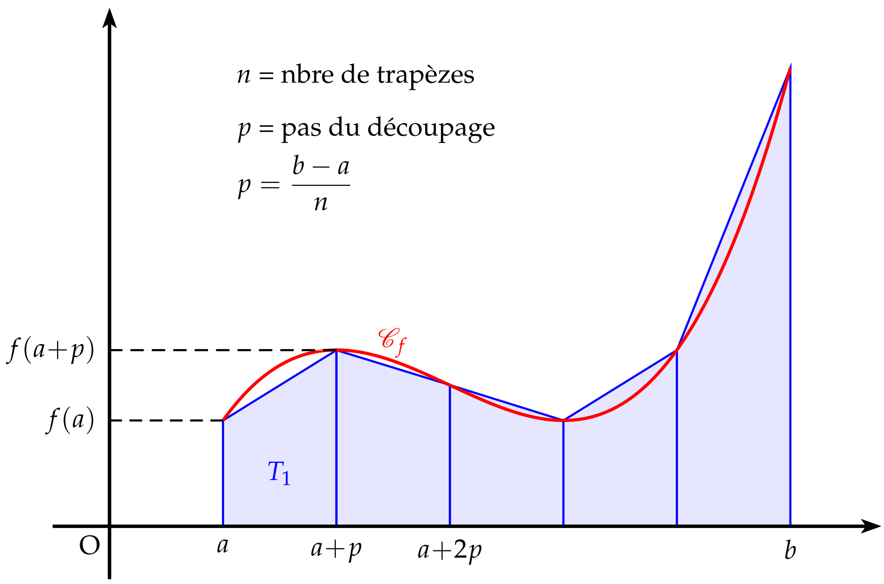
Une primitive de f est donc : $F(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$

4 Approximation d'une aire : méthode des trapèzes

4.1 La méthode

La méthode de Riemann consiste à découper l'aire sous la courbe en deux séries de rectangles (l'une minorante et l'autre majorante). Les deux séries de rectangles tendent vers l'intégrale lorsque le découpage tend vers l'infini.

On peut améliorer la vitesse de convergence de cette approximation en remplaçant les rectangles par des trapèzes comme le montre la figure ci-dessous.



Pour calculer l'aire du premier trapèze

$$T_1 = \frac{(\text{Grande base} + \text{Petite base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{[f(a) + f(a+p)] \times p}{2}$$

On fait ensuite un décalage de p pour calculer les aires des trapèzes suivants.

L'approximation de l'aire sous la courbe est alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} T_i$

4.2 Algorithme

- On initialise S à zéro.
- À chaque boucle, on rajoute l'aire du trapèze :

$$\frac{[f(A) + f(A+P)]P}{2}$$

- On décale A du pas
- On affiche S
- On rentre dans Y_1 la fonction f.

Variables : I, N entiers A, B, P réels
f fonction
Entrées et initialisation
Lire A, B, N
$\dfrac{B-A}{N} \to P$
$0 \to S$
Traitement
pour I de 1 à N **faire**
$S + \dfrac{[f(A) + f(A+P)]\,P}{2} \to S$
$A + P \to A$
fin
Sorties : Afficher S

5 Volume d'un solide de révolution

5.1 Présentation d'une méthode de calcul

Une méthode pour déterminer le volume d'un solide, consiste à découper celui-ci par des plans parallèles. On intègre ensuite les surfaces obtenues par ce découpage suivant l'axe normal à ces plans.

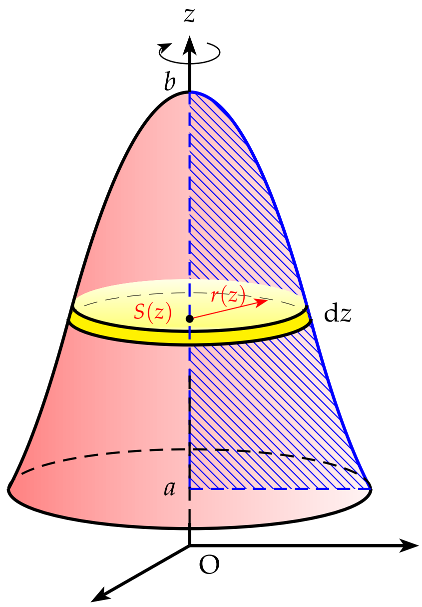
On s'intéressera uniquement au volume de solide de révolution.

Solide de révolution : solide engendrée par une surface de révolution

Surface de révolution : surface engendrée par une courbe (directrice) tournant autour d'un axe.

Si l'axe (Oz) est l'axe de révolution, le volume V du solide de révolution est égal à :

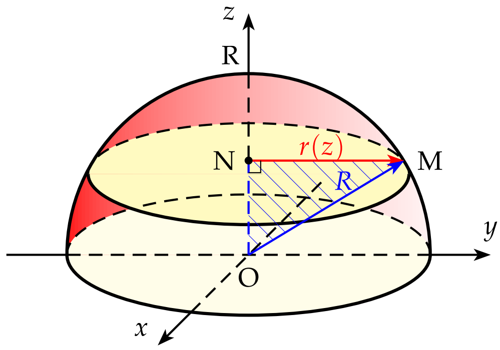
$$\mathrm{V} = \int_a^b S(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \pi\, r^2(z)\,\mathrm{d}z$$



5.2 Calcul du volume d'une sphère

Compte tenu de la symétrie de la sphère, on calcule le volume d'une demi-sphère qu'on multipliera ensuite par 2.
On découpe ainsi la demi-sphère avec des plan perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$. La surface de ces cercles $S(z)$ vaut :

$$S(z) = \pi\, r^2(z)$$



Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle OMN rectangle en $\mathrm{N}(0,0,z)$:

$$r^2(z) = R^2 - z^2$$

On obtient alors le demi volume de la sphère :

$$\frac{1}{2}V = \int_0^R S(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

On retrouve alors le volume de la sphère : $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

5.3 Volume d'un cône

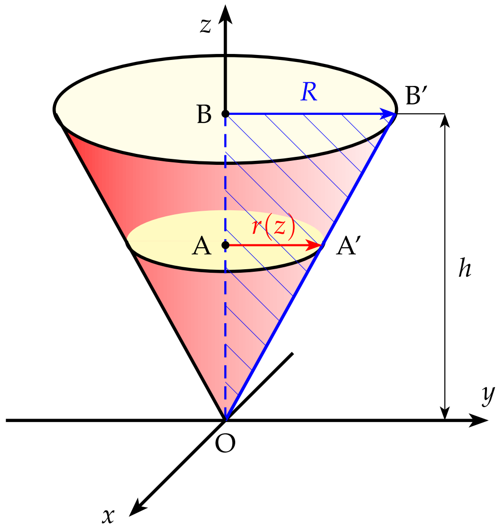
On découpe le cône d'axe (Oz) avec des plans perpendiculaires à l'axe (Oz). Les surfaces obtenues sont alors des cercles de rayon $r(z)$.
Il reste donc à déterminer le rayon $r(z)$ en fonction de z à l'aide du théorème de Thalès dans les triangles : OBB′ et OAA′, on a avec A$(0, 0, z)$:

$$\frac{\text{OA}}{\text{OB}} = \frac{\text{AA}'}{\text{BB}'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{h} = \frac{r(z)}{R} \quad \Leftrightarrow \quad r(z) = \frac{Rz}{h}$$

On obtient ainsi le volume du cône :

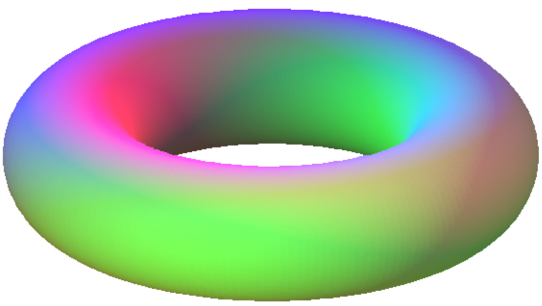
$$\begin{aligned} \text{V} &= \int_0^h \pi\, r^2(z)\, \text{d}z = \int_0^h \pi \frac{R^2 z^2}{h^2} \text{d}z \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \text{d}z = \frac{\pi R^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \pi R^2 h \end{aligned}$$

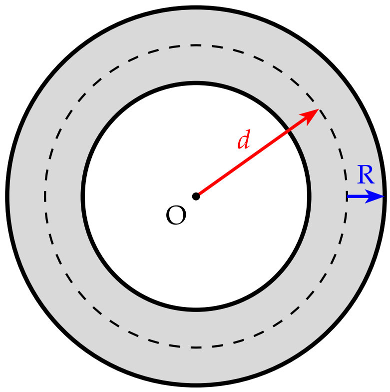
On retrouve ainsi le volume du cône :
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$



5.4 Volume d'un tore

Un tore est un solide qui a la forme d'une « *chambre à air* » ou d'un « *donut* » pour les anglais. Il est caractérisé par d et R comme indiqué sur la figure suivante :





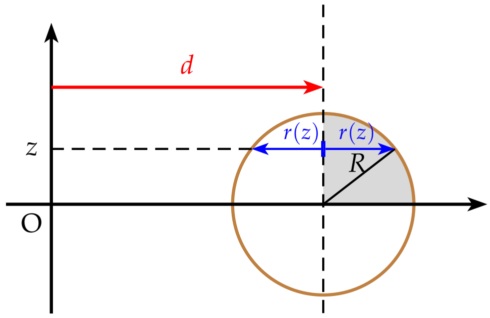
Si l'axe du tore est l'axe z alors lorsqu'on découpe le tore par des plan perpendiculaires à cet axe, on obtient des couronnes dont les rayon des cercles intérieur et extérieur sont respectivement $d + r(z)$ et $d - r(z)$, la surface d'une couronne d'altitude z vaut :

$$\begin{aligned} S(z) &= \pi \left([d + r(z)]^2 - [d - r(z)]^2 \right) \\ &= \pi [d^2 + 2d\, r(z) + r^2(z) - d^2 + 2d\, r(z) - r^2(z)] \\ &= 4\pi\, d\, r(z) \end{aligned}$$

Le volume d'un demi-tore vaut donc : $\dfrac{1}{2}V = \int_0^R S(z)\mathrm{d}z = 4\pi\, d \int_0^R r(z)\mathrm{d}z$

On a la figure ci-dessous :

$$\begin{aligned}\int_0^R r(z)\mathrm{d}z &= \text{aire d'un quart de cercle}\\ &= \frac{\pi}{4}R^2\end{aligned}$$



On obtient alors le volume du tore : $\dfrac{1}{2}V = 4\pi\, d \times \dfrac{\pi}{4}R^2 \quad \Leftrightarrow \quad V = 2\pi^2 R^2 d$