Compléments sur l'intégration et les primitives

I Calcul de primitives

EXERCICE 1

Fonction trigonométrique

On pose pour tout réel x, $f(x) = \cos^2 x \sin^5 x$

1) À l'aide de la relation : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos x$.
2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 2

On pose $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$.

1) Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
   Calculer la dérivée de f.
2) En déduire la valeur de K.

EXERCICE 3

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$ et $g(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1) Transformer les fonctions f et g en somme de deux fonctions dont on connaît une primitive.
2) Calculer alors : $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^2 \frac{e^x-1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

II Fonctions rationnelles

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t(t^2-1)}$

1) Déterminer les trois réels a, b et c tels que pour tout $t \in]1\,;+\infty[$, on ait :

$$f(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

2) En déduire une primitive de f sur $]1\,;+\infty[$

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur $x \in \mathbb{R} - \{-1\,;\,5\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x-5}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-5}$

2) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 5}$

EXERCICE 6

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I. Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée.

1) $f(x) = \dfrac{4x+5}{2x+1}$ et $\mathrm{I} =]1; +\infty[$.

   Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = a + \dfrac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x-2}$ et $\mathrm{I} =]2; +\infty[$.

   Écrire $f(x)$ sous la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

III Intégration par parties

EXERCICE 7

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) $I = \displaystyle\int_1^e x \ln x \, dx$

2) $I = \displaystyle\int_0^1 t e^{2t} \, dt$

3) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (x-1) \cos x \, dx$

4) $I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1} \, dx$

EXERCICE 8

Trouver une primitive F des fonctions f suivantes définies sur I à l'aide d'une intégration par parties.

1) $f(x) = \ln x^2, \quad \mathrm{I} =]0\,; +\infty[$

2) $f(x) = (2x+1)\sin x, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^3 \ln x, \quad \mathrm{I} =]0\,; +\infty[$

4) $f(x) = x^3 e^{-x^2}, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

EXERCICE 9

Trouver une primitive F des fonctions f suivantes définies sur I à l'aide de deux intégrations par parties successives.

1) $f(x) = \ln^2 x, \quad \mathrm{I} =]0; +\infty[$

2) $f(x) = e^{-2x} \cos x, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

3) $f(t) = (x+1)^2 e^{2x}, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

4) $f(x) = x^2 \sin x, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$

EXERCICE 10

On donne $K = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}+1)$

Soit $J = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que $J = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} - K$

Calculer J à l'aide d'une intégration par partie et de la valeur de K.

IV Suite définie par une intégrale

EXERCICE 11

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1) On se propose d'étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,e^{1-x}$.
   a) Étudier les variations de f et préciser ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   b) Calculer I_1
2) On se propose d'étudier la suite (I_n).
   a) Établir que, $\forall x \in [0\,;\,1]$, on a : $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant e\,x^n$, puis prouver d'encadrement suivant :
   $$\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$
   En déduire la limite de I_n.
   b) À l'aide d'une intégration par parties, établir que : $(n+1)I_n = 1 + I_{n+1}$
3) On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n!\,e - I_n$ dans le but d'établir que le nombre e n'est pas un rationnel.
   a) Calculer u_1, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est un entier.
   b) Déduire de l'encadrement obtenue en 2) a) que $n!\,e = u_n + I_n$ n'est pas un entier.
   c) En suppose qu'il existe des entiers p et q strictement positifs tels que $e = \dfrac{p}{q}$.
   Montrer que pour $n \geqslant q$, le nombre $n!\,\dfrac{p}{q}$ est entier, et à l'aide de la question précédente, en déduire une contradiction.
   En déduire alors que le nombre e n'est pas un rationnel.

EXERCICE 12

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

3) Calculer alors I_n pour $n \leqslant 5$

EXERCICE 13

Déterminer une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par : $f(x) = x^n \ln x$ avec $n \in \mathbb{N}$

EXERCICE 14

La formule de Wallis

Soit n un entier naturel. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x$

1) Calculer I_0 et I_1.
2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \textbf{(1)}$$

3) En déduire I_2, I_3, I_4 et I_5.
4) Démontrer par récurrence que :

   a) pour $n \geqslant 1$, $I_{2n} = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} \times \dfrac{\pi}{2}$

   b) pour $n \geqslant 1$, $I_{2n+1} = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)} \times \dfrac{1}{2n+1}$

5) a) Pour $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, comparer $\sin^n x$ et $\sin^{n+1} x$.
   En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

   b) À l'aide de l'égalité **(1)**, établir alors l'encadrement :

$$\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}, \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

   c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

6) Démontrer la formule de Wallis : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$, avec pour $n \geqslant 1$:

$$w_n = \left(\frac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2n+1}$$

7) Montrer que $w_{n+1} = \dfrac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} w_n$.

   Déterminer, à l'aide d'un programme sur votre calculatrice, l'entier n pour lequel w_n se situe à moins de 10^{-2} de la valeur $\dfrac{\pi}{2}$. La convergence est-elle rapide ?

V Changement de variable

EXERCICE 15

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

1) On pose $t = \sin x$, montrer alors que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$

2) Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{1}{2-t^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}-t} + \dfrac{b}{\sqrt{2}+t}$

3) Déterminer alors I.

EXERCICE 16

Soit $I = \displaystyle\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$

1) On pose $t = \sqrt{1+e^x}$, montrer que $\mathrm{d}x = \dfrac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

2) Montrer que : $I = \displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

3) Déterminer alors I.

EXERCICE 17

Soit la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x(x^4-1)}$.

On note une primitive F de f par : $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'on pose $t = x^4$.

a) Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{t-1}{t}\right)$.

b) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

EXERCICE 18

Effectuer les changements de variables proposés pour calculer les intégrales suivantes

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ avec $x = \tan t$

On rappelle que si $f(t) = \tan t$ alors $f'(t) = 1+\tan^2 t$

2) $J = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ avec $t = \sqrt{1+x}$

VI Calculs approchées d'une intégrales

EXERCICE 19

Soit : $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
Calculer par un algorithme une approximation de I :

1) par la méthode des rectangles (Riemann) en encadrant l'intégrale par 10 rectangles de même largeur minorants et majorants respectivement l'intégrale ;
2) par la méthode des trapèzes avec un pas de $\dfrac{1}{10}$.
3) Comparer ces approximations avec la valeur approchée $I \approx 0{,}746\,824\,133\,0$

EXERCICE 20

Soit : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.
Calculer par un algorithme une approximation de I :

1) par la méthode des rectangles (Riemann) en encadrant l'intégrale par 10 rectangles de même largeur minorants et majorants respectivement l'intégrale ;
2) par la méthode des trapèzes avec un pas de $\dfrac{1}{10}$.
3) Comparer ces approximations avec la valeur approchée $I \approx 1{,}089\,429\,413$

VII Existence de primitive

EXERCICE 21

On a vu en terminale que toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive F sur I. Qu'en est-il des fonctions qui ne sont pas continue ?
Cet exercice permet de constater que le problème n'est pas si simple.

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   On suppose que f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$

   a) Quelle doit être la forme de F sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;+\infty[$
   b) Comme la fonction F doit être dérivable en 0, montrer que $F'(0) = 1$
   c) Conclure alors sur l'existence d'une primitive F sur $\mathbb{R}$.

2) Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

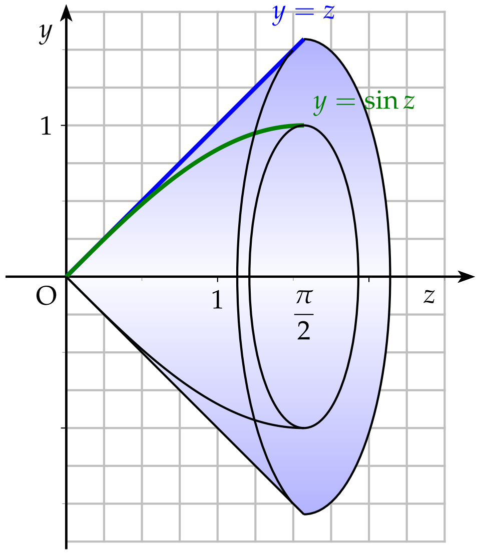
   a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée f. On traitera à part le point 0.
   b) Montrer que f n'est pas continue en 0.

Conclusion : On vient de voir deux fonctions non continues en 0 dont l'une n'admet pas de primitive et l'autre qui en admet une.

VIII Volumes de solides de révolution

EXERCICE 22

Calculer le volume du solide obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) du domaine compris entre le segment d'équation $y = z$ et le morceau de sinusoïde d'équation $y = \sin z$, pour $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{\pi}{2}$



EXERCICE 23

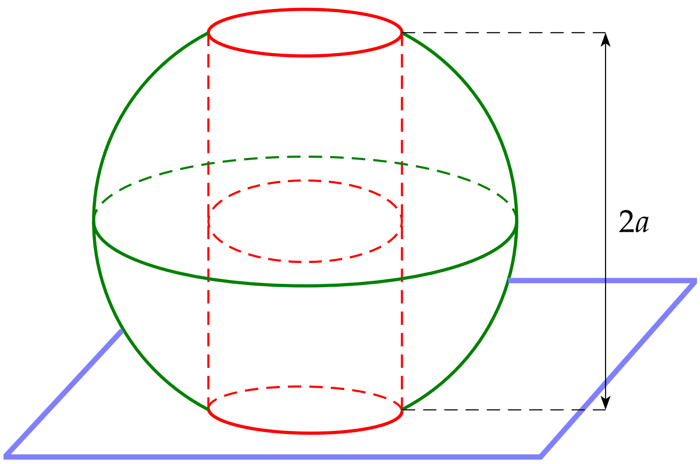
Soit k un réel strictement négatif.
Calculer le volume V_k, du solide obtenu par révolution autour de l'axe (Oy) du domaine D_k limité par les axes de coordonnées (Ox) et (Oy), la droite d'équation $y = k$ et la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$.

Étudier $\displaystyle\lim_{k \to -\infty} V_k$

EXERCICE 24

On perce un trou cylindrique à travers une sphère, l'axe du cylindre passant par le centre de la sphère.

Quel est le volume du solide restant sachant que ce solide est de hauteur $2a$.



Aide : L'axe (Oz) étant l'axe du cylindre, montrer que la section du solide par le plan de cote z est une couronne d'aire $\pi(a^2 - z^2)$ ou l'ensemble vide.