Cinématique dans le plan Coordonnées polaires

Table des matières

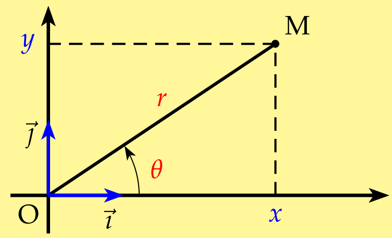
1 Cinématique dans le plan

1.1 Coordonnées polaires

Définition 1 : Pour tout point M distinct de O, le couple (r, θ) tel que :

$r = \text{OM}$ et $\theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{\text{OM}})$ est appelé coordonnées polaires du point M.

Le couple (x, y) est appelé coordonnées cartésiennes du point M.



1.2 Formules de passages

- Si l'on connaît les coordonnées cartésiennes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{on déduit } \theta$$

Exemple : Soit $\text{M}(\sqrt{3}\,;-1)$. Déterminer les coordonnées polaires de M.

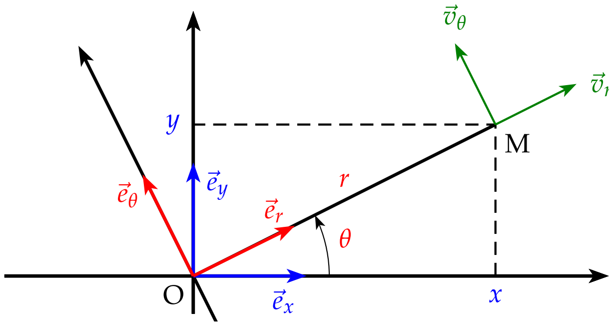
$$r = \sqrt{3+1} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6} \qquad \text{donc M} \left(2\,;-\frac{\pi}{6}\right)$$

- Si l'on connaît les coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Exemple : Soit $\text{M}\left(3\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de M

$$x = 3\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y = 3\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{M}\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

1.3 Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires



1.3.1 Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Comme le repère $(\mathrm{O}\,,\vec{e}_x\,,\vec{e}_y)$ est fixe. On a :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_y \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{v} = (x'\,;\,y')}$$

1.3.2 Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Le repère $(\mathrm{O}\,,\vec{e}_r\,,\vec{e}_\theta)$ est en mouvement avec θ.

Les coordonnées de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans le repère $(\mathrm{O}\,,\vec{e}_x\,,\vec{e}_y)$ sont :

$$\vec{e}_r = (\cos\theta\,;\,\sin\theta) \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = (-\sin\theta\,;\,\cos\theta)$$

Si l'on dérive ses vecteurs en fonction de θ, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_y = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \vec{e}_\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}(-\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\vec{e}_y = -\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y = -\vec{e}_r$$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{e}_r$, on a pour le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\vec{e}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r'\,\vec{e}_r + r\theta'\,\vec{e}_\theta$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont donc : $\boxed{\overrightarrow{v} = (r'\,,\,r\theta')}$

1.3.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Comme le repère $(\mathrm{O}\,,\vec{e}_x\,,\vec{e}_y)$ est fixe. On a :

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}^2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_y \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{a} = (x''\,;\,y'')}$$

1.3.4 Vecteur accélération en coordonnées polaires

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r'\,\vec{e}_r + r\theta'\,\vec{e}_\theta)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r'\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(r\theta')}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\theta + r\theta'\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= r''\,\vec{e}_r + r'\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + (r'\theta' + r\theta'')\,\vec{e}_\theta + r\theta'\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= r''\,\vec{e}_r + r'\theta'\,\vec{e}_\theta + (r'\theta' + r\theta'')\,\vec{e}_\theta - r(\theta')^2\,\vec{e}_r \\
&= (r'' - r\theta'^2)\,\vec{e}_r + (r\theta'' + 2r'\theta')\,\vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Les coordonnées du vecteur accélération sont donc : $\boxed{\overrightarrow{a} = (r'' - r\theta'^2\,,\,r\theta'' + 2r'\theta')}$

1.3.5 Application au mouvement circulaire

Théorème 1 : Les vecteurs vitesse et accélération on pour expression dans un mouvement circulaire :

- **Non uniforme.** On pose $r = R$ (constant) et $\omega = \theta'$ (vitesse angulaire)

$$\overrightarrow{v} = (0\,,\ R\omega) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = (-R\omega^2\,,\ R\omega')$$

  La vitesse normale est nulle.

- **Uniforme.** On pose $r = R$ (constant) et $\omega_0 = \theta'$ (vitesse angulaire constante)

$$\overrightarrow{v} = (0\,,\ R\omega_0) = (0\,;\ v_0) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = (-R\omega_0^2\,,\ 0) = \left(-\frac{v_0^2}{R}\,,\ 0\right)$$

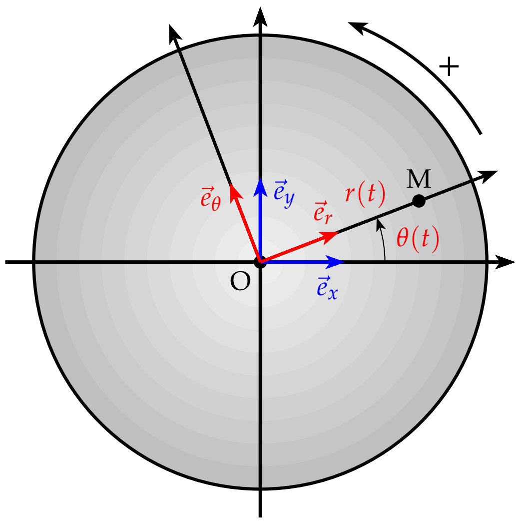
  L'accélération tangentielle est nulle et l'accélération normale est dirigée vers le centre O

2 Exemples

2.1 Spirale d'Archimède

Un disque $\mathcal{D}$ de centre O tourne dans le plan Oxy à une vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe Oz.
Un mobile ponctuel M part de O à l'instant $t = 0$ et est astreint à se déplacer une vitesse constante le long d'un rayon du disque $\vec{v} = v_0\,\vec{e}_r$.

Le but est d'étudier la trajectoire du point M dans le repère fixe Oxy.



On détermine les expressions de r et θ en fonction de t.

- Comme le point M est contraint de se déplacer à vitesse constante sur un rayon, on a : $r(t) = v_0\,t$
- Comme le disque tourne avec une vitesse angulaire constante, on a : $\theta(t) = \omega_0\,t$

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(\text{O}\,;\ \vec{e}_r\,, \vec{e}_\theta)$:

- Les coordonnées du point M sont $\text{M}(r\,,\ \theta) = (v_0\,t\,,\ \omega_0\,t)$.
- Les coordonnées du vecteur vitesse sont : $\overrightarrow{v}\,(r'\,,\ r\theta') = (v_0\,,\ v_0\omega_0\,t)$
- Les coordonnées du vecteur accélération sont :

$$\overrightarrow{a}\,(r'' - r\theta'^2\,,\ r\theta'' + 2r'\theta') = (-v_0\omega_0^2\,t\,,\ 2v_0\omega_0)$$

Pour trouver la trajectoire de M dans le repère Oxy,

- on peut revenir aux coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x(t) = r\cos\theta = v_0 t\cos(\omega_0 t) \\ y(t) = r\sin\theta = v_0 t\sin(\omega_0 t) \end{cases}$

  On obtient alors une courbe paramétrique.

- mais on peut revenir à une courbe polaire définie par la fonction $r(\theta) = \dfrac{v_0}{\omega_0} \times \theta$

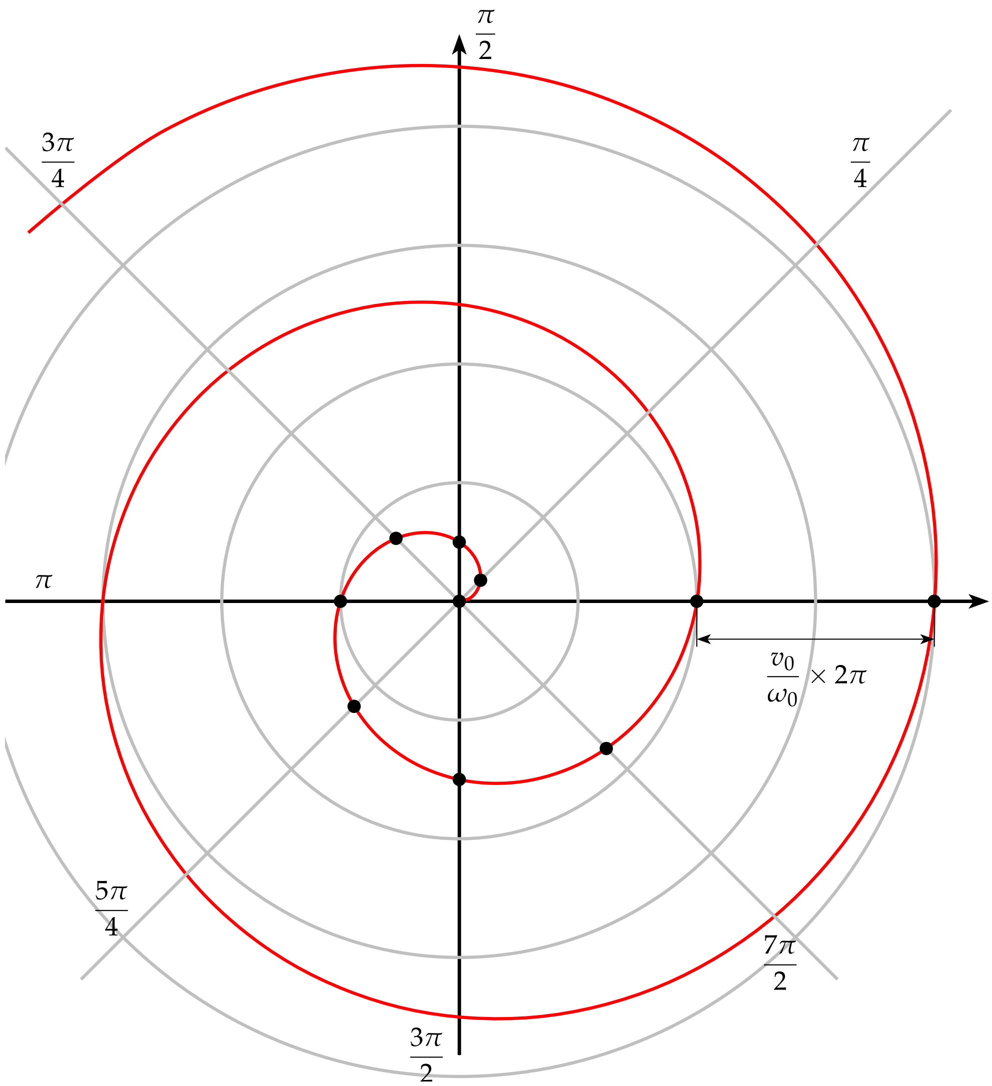
  en effet $\theta = \omega_0\, t \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{\theta}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad r = v_0\, t = \dfrac{v_0}{\omega_0} \times \theta.$

  Le rayon est alors proportionnel à l'angle. À chaque fois que le disque effectue un tour $\theta = 2\pi$ le rayon augmente de $d = \dfrac{v_0}{\omega_0} \times 2\pi$.

  C'est ce qui caractérise cette courbe appelé spirale d'Archimède (comparable au sillon de notre bon vieux vinyle).

  On peut remplir un tableau de valeur pour les angles caractéristiques :

θ	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	π	$\dfrac{5\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{7\pi}{4}$
$r(\theta)$	0	$\dfrac{v_0\pi}{4\omega_0}$	$\dfrac{v_0\pi}{2\omega_0}$	$\dfrac{3v_0\pi}{4\omega_0}$	$\dfrac{v_0\pi}{\omega_0}$	$\dfrac{5v_0\pi}{4\omega_0}$	$\dfrac{3v_0\pi}{2\omega_0}$	$\dfrac{7v_0\pi}{4\omega_0}$

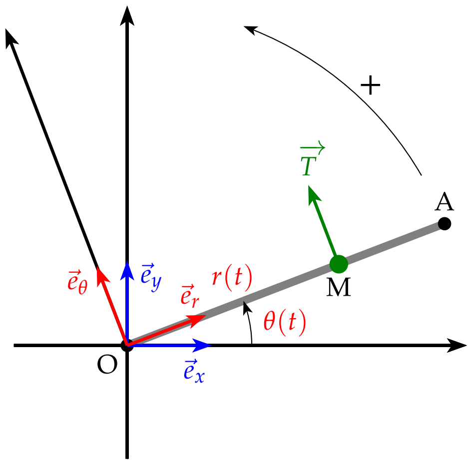


2.2 Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation

Une tige rectiligne horizontale (OA) tourne, à vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe Oz perpendiculaire au plan horizontal Oxy. Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.

À l'instant t, la rotation de la tige est repérée par l'angle θ et la position de l'anneau sur la tige par $r = \text{OM}$.

À l'instant $t = 0$, l'anneau à une vitesse nulle par rapport à la tige et se trouve à une distance r_0 du point O.



Comme la tige a une vitesse de rotation constante, on a : $\theta(t) = \omega_0\, t$.

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(\text{O}\,;\,\vec{e}_r\,,\vec{e}_\theta)$:

- Les coordonnées du point M sont $\text{M}(r\,,\,\theta) = (r\,,\,\omega_0\, t)$.
- Les coordonnées du vecteur vitesse sont : $\overrightarrow{v}\,(r'\,,\,r\theta') = (r'\,,\,r\omega_0)$
- Les coordonnées du vecteur accélération sont :
$$\overrightarrow{a}\,(r'' - r\theta'^2\,,\,r\theta'' + 2r'\theta') = (r'' - r\omega_0^2\,,\,2r'\omega_0)$$

La seule force extérieure est la force $\overrightarrow{T}$ exercée par la tige sur l'anneau, d'après le principe fondamental de la dynamique : $m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{T}$.

Comme il n'y a pas de frottement de la tige sur l'anneau, la composante de $\overrightarrow{T}$ sur $\vec{e}_r$ est nulle, d'où les coordonnée de $\overrightarrow{T}\,(0\,;\,T_\theta)$

$$m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{T} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} m(r'' - r\omega_0^2) = 0 & (1) \\ 2mr'\omega_0 = T_\theta & (2) \end{cases}$$

- Résolution de l'équation (1) du second ordre : $r'' - \omega_0^2\, r = 0$

  Les solutions du polynôme caractéristique $X^2 - \omega_0^2 = 0$ sont $\pm\omega_0$.

  La solution générale de (1) est donc : $r(t) = \lambda\, e^{\omega_0\, t} + \mu\, e^{-\omega_0\, t}$.

  On dérive : $r'(t) = \lambda\omega_0\, e^{\omega_0\, t} - \mu\omega_0\, e^{-\omega_0\, t}$

  Des conditions initiales : $\begin{cases} r(0) = r_0 \\ r'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = r_0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \dfrac{r_0}{2}$

  On obtient alors la solution : $\boxed{r(t) = \dfrac{r_0}{2}(e^{\omega_0\, t} + e^{-\omega_0\, t}) = r_0\,\text{ch}(\omega_0\, t)}$

- En remplaçant dans (2), on trouve : $T_\theta = 2mr'\omega_0 = 2m\, r_0\, \omega_0^2\,\text{sh}(\omega_0\, t)$

Remarque : T_θ est toujours positive et non perpendiculaire au déplacement donc le travail de la force de réaction pour une fois n'est pas nul. Il est moteur !

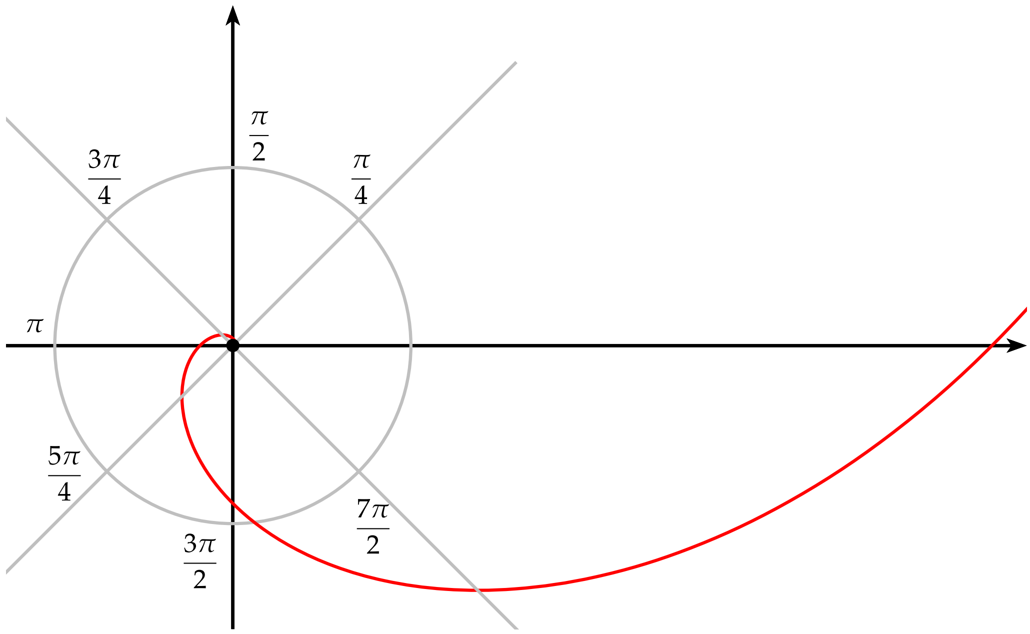
Pour trouver la trajectoire de M dans le repère Oxy,

- on peut revenir aux coordonnées cartésiennes : $\begin{cases} x(t) = r\cos\theta = r_0 \operatorname{ch}(\omega_0\, t)\cos(\omega_0 t) \\ y(t) = r\sin\theta = r_0 \operatorname{ch}(\omega_0\, t)\sin(\omega_0 t) \end{cases}$

  On obtient alors une courbe paramétrique.

- mais on peut revenir à une courbe polaire définie par la fonction $r(\theta) = r_0 \operatorname{ch}(\theta)$ en effet $\theta = \omega_0\, t \;\Leftrightarrow\; t = \dfrac{\theta}{\omega_0} \;\Rightarrow\; r = r_0 \operatorname{ch}(\omega_0\, t) = r_0 \operatorname{ch}(\theta)$.

  Cette courbe est appelée spirale logarithmique.

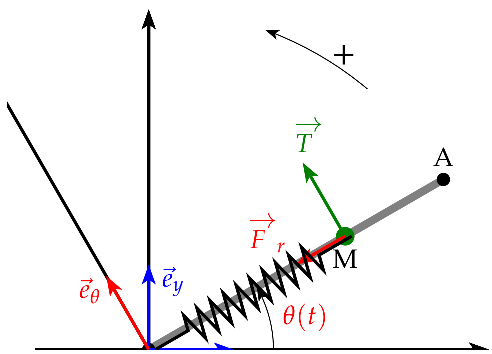


2.3 Le même avec une force de rappel

L'anneau est soumis, en plus, à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k de longueur à vide r_0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée l'anneau M.

La force de rappel $\overrightarrow{F}_r$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}(\mathrm{O}\,;\,\vec{e}_r\,,\vec{e}_\theta)$:

$$\overrightarrow{F}_r = -k(r - r_0)\,\vec{e}_r$$



D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{T} \;\Leftrightarrow\; m\,\overrightarrow{a} = -k(r - r_0)\,\vec{e}_r + T_\theta\,\vec{e}_\theta \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m(r'' - r\omega_0^2) = -k(r - r_0) \quad (1) \\ 2mr'\omega_0 = T_\theta \quad (2) \end{cases}$$

De l'équation (1) : $r'' - r\omega_0^2 = -\dfrac{k}{m}r + \dfrac{k}{m}r_0 \Leftrightarrow r'' + \left(\dfrac{k}{m} - \omega_0^2\right) r = \dfrac{k}{m} r_0$

La solution particulière est donc : $r_p = \dfrac{kr_0}{k - m\omega_0}$

- Si la constante de raideur est faible : $\dfrac{k}{m} < \omega_0^2$

  le polynôme caractéristique admet deux racines réelles $\pm\,\omega$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0 - \dfrac{k}{m}}$.

  On retrouve alors les solutions de l'exercice précédent : $\boxed{r(t) = r_0 \operatorname{ch}(\omega\, t) + r_p}$

- Si la constante de raideur vérifie $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$

  L'équation (1) devient : $r'' = \dfrac{k}{m} r_0$

  En intégrant deux fois : $r(t) = \dfrac{k}{m} r_0\, t^2 + at + b$.

  Des conditions initiales $\begin{cases} r(0) = r_0 \\ r'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = r_0 \\ a = 0 \end{cases}$

  On obtient alors la solution : $\boxed{r(t) = \dfrac{k}{m} r_0\, t^2 + r_0}$

  Remarque : Dans ces deux cas le ressort cassera.

- Si la constante de raideur est grande : $\dfrac{k}{m} > \omega_0^2$

  On obtient alors un régime harmonique, en posant $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \omega_0^2}$

  On obtient la solution générale : $r(t) = \lambda \cos(\omega\, t) + \mu \sin(\omega\, t) + r_p$.

  On dérive : $r'(t) = -\lambda\omega \sin(\omega\, t) + \mu\omega \cos(\omega_0\, t)$

  Des conditions initiales : $\begin{cases} r(0) = r_0 \\ r'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + r_p = r_0 \\ \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = r_0 - r_p \\ \mu = 0 \end{cases}$

  On obtient alors la solution : $\boxed{r(t) = (r_0 - r_p)\cos(\omega\, t) + r_p}$

  r_p correspond à la position d'équilibre. L'anneau oscillera alors autour de sa position d'équilibre.