Équations différentielles

I Premier ordre à coefficients constants

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle proposée :

1) $y' = 3y$
2) $y' + 2y = 0$
3) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$
4) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \dfrac{1}{2}$
5) $y' = 2y + 1$
6) $y + 3y' = 2$
7) $2y + 3y' - 1 = 0$
8) $2y' = y - 1$

Exercice 2

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-3x}$.
   Trouver une équation différentielle pour laquelle f est solution.
2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3e^{-2x} - 4$.
   Trouver une équation différentielle pour laquelle f est solution.

Exercice 3

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \quad y' = \frac{y}{4}$$

   a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).
   b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
   c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions

$$(\mathrm{E}_2) \quad \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u^2(t)}{12} & \forall t \in]0\,;+\infty[\\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E}_3) \quad \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \forall t \in]0\,;+\infty[\\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$.
et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$

II Premier ordre coefficients non constants

Exercice 4

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{2}y = 20\,e^{-\frac{1}{2}t}$

1) Résoudre l'équation homogène associé à (E).
2) A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer toutes les solutions de (E).
3) Déterminer la solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 10$

Exercice 5

Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = \sin x$

1) Résoudre l'équation homogène associé à (E).
2) Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :
$p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3) Déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$

Exercice 6

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$

a) Montrer que $-\ln|\cos x|$ est une primitive de la fonction tan pour $x \neq \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

b) Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène de (E) sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$

c) Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sur I puis en déduire toutes les solutions de (E) sur I.

d) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$

EXERCICE 7

Soit l'équation différentielle (E) définie sur $]0\,;+\infty[$: $\quad x\,y' - 3y = 3\ln x$

1) Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2) A l'aide de la méthode de la variation de la constante, déterminer toutes les solutions de (E).
3) Déterminer la solution f de (E) définie sur $]0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition initiale $\quad f(1) = 0$

III Second ordre homogène

EXERCICE 8

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 2y = 0$
2) $y'' - 4y' + 3y = 0$
3) $y'' + y' + y = 0$
4) $y'' + 4y' - 5y = 0$
5) $y'' - 4y' - 4y = 0$
6) $4y'' + 4y' + y = 0$
7) $2y'' + y'\sqrt{2} + y = 0$
8) $9y'' + 6y' + y = 0$

EXERCICE 9

Résoudre les équations différentielles suivantes vérifiant les conditions initiales données :

1) $\begin{cases} y'' = -4y \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ et } y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4y'' + 9y = 0 \\ y\,(\pi) = 1 \text{ et } y'\,(\pi) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(1) = 1 \text{ et } y'(1) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(\pi) = 0 \text{ et } y'(\pi) = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 3 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'' - 4y' = 0 \\ y(0) = 8 \text{ et } y'(0) = 4 \end{cases}$

EXERCICE 10

1) Résoudre l'équation différentielle : $\quad y'' - 2y' + 2y = 0$

2) On lance trois fois un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a, b et c les résultats obtenus respectivement au premier, deuxième et troisième lancés.

   Déterminer la probabilité de l'événement suivant : « les solutions de l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ sont donnés par $\quad y = e^x(\lambda\cos x + \mu\sin x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ »

IV Second ordre linéaire

EXERCICE 11

Déterminer toutes les solutions des équations différentielles suivantes dont une solution particulière g vérifie la forme donnée.

1) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$ avec $g : x \mapsto Ae^{4x}$

2) $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$ avec $g : x \mapsto (Ax + B)e^{2x}$.

EXERCICE 12

Équation à coefficients non constants

On appelle (E) l'ensemble des fonctions f admettant des dérivées f' , f'' et $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle : $(x-1)y'' - xy' + y = 0$.

1) Montrer que, si f appartient à (E), alors : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}\,,\ f^{(3)}(x) = f''(x)$.

   En déduire que, si f est un élément de (E), alors $f^{(3)} = f''$, puis que f'' est solution d'une équation différentielle de la forme : $y' - my = 0,\ (m \in \mathbb{R})$

2) À l'aide de deux intégrations, montrer que les éléments de (E) sont de la forme : $f(x) = ax + be^{x},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$

EXERCICE 13

Équation d'ordre 3

Soit l'équation différentielle (E) : $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

1) Vérifier que la fonction $h\ :\ x \mapsto e^{2x}$ est solution de (E).

2) Soit f une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto f(x)e^{-2x}$.
   Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, g''' est la fonction nulle.

3) En déduire les solutions de (E).