Dénombrement

1 Calcul sur les factorielles

EXERCICE 1

Simplifier les écritures sans utiliser la calculette.

1) $\dfrac{21!}{20!}$

2) $\dfrac{17!}{15!}$

3) $\dfrac{6!-5!}{5!}$

4) $\dfrac{6\times 4!}{5!}$

5) $\dfrac{7!\times 5!}{10!}$

6) $\dfrac{1}{5!}-\dfrac{42}{7!}$

7) $\dfrac{6!}{3!\times 3!}$

8) $\dfrac{9!}{5!\times 4!}$

9) $\dfrac{9!}{6!\times 3!}$

10) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

11) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

12) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$

13) $\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n+1)!}$

EXERCICE 2

En utilisant la notation factorielle, donner une autre écriture des nombres suivants

1) $A = 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$

2) $B = \dfrac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{3\times 2}$

3) $C = n(n+1)(n+2)$

EXERCICE 3

Sans calculatrice, exprimer sous forme d'entiers ou de fractions les nombres suivants :

$$A = \binom{6}{2} \qquad B = \binom{12}{8} \qquad C = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} \qquad D = \frac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}.$$

EXERCICE 4

Prouver que $n\times\dbinom{n-1}{p-1} = p\times\dbinom{n}{p}$ pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant p \leqslant n$.

EXERCICE 5

Trouver l'entier n satisfaisant la condition indiquée

a) $\dbinom{n}{2} = 36$

b) $3\times\dbinom{n}{4} = 14\times\dbinom{n}{2}$

2 Dénombrement

Exercice 6

Écrire toutes les permutations de l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$

Exercice 7

Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité de 4 membres : un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. Combien de comités différents peut-on élire ?

Exercice 8

1) Dans un meeting d'athlétisme, la finale de saut en longueur met aux prises douze athlètes ; il n'y a pas d'ex-æquo. Combien existe-t-il de classements possibles ?
2) La finale du 100 m plat met aux prises huit athlètes ; tous arrivent et il n'y a pas d'ex-æquo.Combien existe-t-il d'arrivées dans l'ordre des trois premiers ?

Exercice 9

Anagrammes

1) Combien peut-on former d'anagrammes du mot « LAINE » ?
2) Combien de ces anagrammes commencent par une consonne ?
3) Reprenez les deux questions précédentes avec le mot « BALEINE ».

Exercice 10

Code

1) Combien existe-t-il de codes, de quatre chiffres, possibles pour une carte bancaire ?
2) Combien existe-t-il de numéros de téléphone commençant par 0605 ?

Exercice 11

L'entrée d'un immeuble est commandée par un appareil à digicodes qui possède 10 chiffres et 4 lettres. Un digicode comporte cinq éléments : trois chiffres et deux lettres.

1) Combien y a-t-il de digicodes possibles ?
2) Combien d'entre eux commencent par le chiffre 0 ?
3) Combien d'entre eux commencent par trois chiffres identiques ?
4) Combien d'entre eux ont deux lettres identiques ?

Exercice 12

On jette un dé à 6 faces, trois fois de suite et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

1) Quel est le nombre de résultats possibles ?

2) Quel est le nombre de résultats comportant 3 chiffres identiques
3) Quel est le nombre de résultats comportant 3 chiffres distincts deux à deux
4) Quel est le nombre de résultats comportant 2 jets seulement de chiffres identiques.

EXERCICE 13

On place au hasard trois chemises de couleurs bleue, blanche et rouge dans quatre tiroirs a, b, c, d. Chaque répartition est équiprobable.

1) Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
2) Calculer le nombre de répartitions des événements suivants :
   a) A : « toutes les chemises sont dans le tiroir a » ;
   b) B : « toutes les chemises sont dans le même tiroir » ;
   c) C : « les tiroirs b et c sont vides ».

EXERCICE 14

Sous-ensemble
Combien y a-t-il de sous-ensembles contenant trois éléments de l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e; f\}$? Écrire, alors, tous ces sous-ensembles.

EXERCICE 15

Dix-huit personnes se rencontrent. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de poignées de mains échangées ?

EXERCICE 16

Sur un damier « 4×4 » de seize cases, on place quatre jetons sur quatre cases différentes.

1) Les jetons sont de quatre couleurs différentes. De combien de façons peut-on les disposer
2) Les jetons sont identiques. De combien de façons peut-on les disposer ?

EXERCICE 17

Loto
Chaque semaine, le jeu « Loto. Foot 7 et 15 » propose une grille avec 15 rencontres de football. Le jeu consiste à pronostiquer les résultats des 7 premiers matchs de la liste (jeu à 7) ou des 15 matchs (jeu à 15). Pour chaque match, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 est annoncée comme gagnante (réponse « 1 »), le résultat prévu est un match nul (réponse « N »), l'équipe 2 est annoncée comme gagnante (réponse « 2 »). Le parieur coche une et une seule des trois cases $\boxed{1}\boxed{N}\boxed{2}$

1) De combien de façons différentes, peut-on remplir une grille :
   a) pour le jeu à 7   b) pour le jeu à 15 ?
2) Pour le jeu à 7, on « gagne» à partir de 6 réponses exactes et pour le jeu à 15 à partir de 12 réponses exactes. Combien y a-t-il de grilles gagnantes :
   a) pour le jeu à 7 ?   b) pour le jeu à 15 ?

EXERCICE 18

Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y, Z, portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants

- 60 % lisent X, 50 % lisent Y et 50 % lisent Z ;
- 20 % lisent Y et Z, 30 % lisent X et Z et 30 % lisent X etY ;
- 10 % lisent les trois revues.

Parmi ces 1 000 personnes :

1) combien lisent deux de ces revues exactement ?
2) combien ne lisent aucune de ces revues ?

EXERCICE 19

Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

1) exactement un roi, une dame et 2 valets ?
2) l'as de pique et au moins 2 trèfles ?
3) exactement un roi et deux carreaux ?

EXERCICE 20

Le jeu de « Master Mind » se joue à deux joueurs. L'un dispose cinq fiches dans cinq trous, les fiches sont choisies parmi huit couleurs, et le joueur dispose de cinq fiches de chaque couleur. L'autre joueur doit deviner la disposition choisie par l'autre.

1) Combien de dispositions peut-on constituer ?
2) On place au plus cinq fiches dans les cinq trous (certains trous peuvent rester vides). Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
3) Le constructeur annonce 59 049 combinaisons possibles. Est-ce justifié ?

EXERCICE 21

Un Q.C.M. est composé de cinq items.
Pour chacun d'eux, trois réponses sont proposées, une seule est vraie.

1) De combien de façons peut-on répondre au Q.C.M. ?
2) De combien de façons peut-on répondre correctement aux cinq items ?
3) De combien de façons peut-on répondre correctement à quatre items exactement ?

EXERCICE 22

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes, 2 boules vertes. On tire au hasard trois boules simultanément.
Déterminer le nombre de tirages possibles comportant :

1) 3 boules de la même couleur ?
2) 1 boule de chaque couleur ?
3) 3 boules de deux couleurs différentes seulement ?

Exercice 23

Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules bleues et 5 boules rouges.
Une urne B contient 4 boules bleues.
On tire simultanément deux boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B, puis on tire trois boules simultanément de l'urne B.
Quel est le nombre de tirages tricolores possibles ?

3 Formules

Exercice 24

1) Développer les expressions suivantes :
   a) $(2-x)^4$ b) $(1-2x)^7$ c) $(1+2i)^6$

2) En utilisant la formule du binôme, démontrer que pour tout entier naturel n, 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4.

3) Une urne contient sept boules numérotés de 1 à 7. On tire simultanément trois boules.
   a) Combien y a-t-il de tirages possibles faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est 3 ? dont le plus grand numéro est 4 ?
   b) Plus généralement, k est un entier tel que $3 \leqslant k \leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est k ?
   c) En déduire deux entiers n et p tels que :
   $$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=\binom{n}{p}$$
   d) Comment retrouver cette formule avec le triangle de Pascal ?

4) Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On extrait n boules simultanément.
   a) Combien peut-on obtenir de résultats ?
   b) p est un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$. Démontrer que $\binom{n}{p}^2$ résultats contiennent exactement p boules blanches.
   c) En déduire la somme :
   $$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$