Dénombrement - Correction

1 Calcul sur les factorielles

EXERCICE 1

1) 21

2) $17 \times 16 = 272$

3) $\dfrac{5!(6-1)}{5!} = 5$

4) $\dfrac{6 \times 4!}{5!} = \dfrac{6}{5}$

5) $\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \dfrac{1}{6}$

6) 0

7) $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$

8) $\dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 126$

9) $\dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$

10) $n(n+1)$

11) $2n(2n+1)$

12) $\dfrac{n}{(n+1)!}$

13) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$

EXERCICE 2

1) $A = \dfrac{10!}{3!}$ 2) $B = \dfrac{9!}{4! \times 3!}$ 3) $C = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

EXERCICE 3

$$A = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \qquad B = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 495$$

$$C = \frac{\dfrac{7 \times 6}{2}}{\dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}} = \frac{7 \times 3}{12 \times 7} = \frac{1}{4} \qquad D = \frac{\dfrac{5\times4}{2} \times \dfrac{6\times5}{2}}{\dfrac{9\times8\times7}{3\times2}} = \frac{5\times4\times6\times5}{2\times3\times8\times7} = \frac{25}{14}.$$

EXERCICE 4

$$n \times \binom{n-1}{p-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} = \frac{n!}{\dfrac{p!}{p} \times (n-p)!} = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$= p \times \binom{n}{p}$$

EXERCICE 5

a) $\dbinom{n}{2} = 36 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{n(n-1)}{2} = 36 \;\Leftrightarrow\; n^2 - n - 72 = 0$

$\Delta = 1 + 288 = 289 = 17^2$, la racine positive $n = \dfrac{1+17}{2} = 9$

b) $3 \times \binom{n}{4} = 14 \times \binom{n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \times \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2} = 14 \times \dfrac{n(n-1)}{2} \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{(n-2)(n-3)}{8} = 7 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 3n - 2n + 6 = 56 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 5n - 50 = 0$

$\Delta = 25 + 200 = 225 = 15^2$, la racine positive $\quad n = \dfrac{5+15}{2} = 10$

2 Dénombrement

Exercice 6

Il y a 24 permutations :

a,b,c,d	a,b,d,c	a,c,b,d	a,c,d,b	a,d,b,c	a,d,c,b
b,a,c,d	b,a,d,c	b,c,a,d	b,c,d,a	b,d,a,c	b,d,c,a
c,a,b,d	c,a,d,b	c,b,a,d	c,b,d,a	c,d,a,b	c,d,b,a
d,a,b,c	d,a,c,b	d,b,a,c	d,b,c,a	d,c,a,b	d,c,b,a

Exercice 7

$A^4_{20} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\,280$

Exercice 8

1) $A^{12}_{12} = 12! = 479\,001\,600$

2) $A^3_8 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

Exercice 9

Anagrammes

1) Il s'agit de dénombrer toutes les permutations de 5 éléments : $\;5! = 120$.

2) Pour la première case, on a 2 choix correspondant à deux consonnes, après permutation de 4 lettres : $\;2 \times 4! = 48$.

3) Le mot « BALEINE » contient deux « E » indifférentiables. Pour placer les deux « E » sur les 7 cases, il s'agit d'une combinaison de 2 éléments parmi 7. Ensuite, il y a permutation des 5 lettres restantes : $\;\binom{7}{2} \times 5! = 2\,520$..

   Pour un mot commençant par une consonne, on a 3 choix pour la première case, ensuite combinaison de deux « E » parmi les 6 cases restantes puis permutation des 4 lettres restantes : $\;3 \times \binom{6}{2} \times 4! = 1\,080$.

Exercice 10

Code

1) Il y a 10 chiffres possibles donc : $\;10^4\;$ codes possibles.

2) Il y a 10 chiffres dans un numéro de téléphone, on en impose 4, il reste à choisir 6 chiffres parmi 10 soit : 10^6 numéros de téléphone.

EXERCICE 11

1) Sur les 5 emplacements, il faut placer 3 chiffres, soit une combinaison de 3 éléments parmi 5. Ensuite, il y a 10^3 nombres de 3 chiffres et 4^2 mots de deux lettres parmi 4.

   On a donc $\binom{5}{3} \times 10^2 \times 4^2 = 10 \times 10^3 \times 16 = 160\,000$ digicodes possibles.

2) On sait que le premier emplacement est pour 0, il faut ensuite placer deux chiffres parmi les 4 emplacements restants. Il y a 10^2 nombres de 2 chiffres et 4^2 mots de 2 lettres.

   Il y a : $\binom{4}{2} \times 10^2 \times 4^2 = 9\,600$ digicodes qui commencent par 0.

3) Il faut choisir ce chiffres soit 10 choix puis 4^2 mots de 2 lettres.

   Il y a : $10 \times 4^2 = 160$ digicodes qui commencent par 3 chiffres identiques.

4) Même raisonnements qu'au début que la question 1), mais avec 4 mots composés de 2 lettres identiques.

   Il y a : $\binom{5}{3} \times 10^2 \times 4 = 40\,000$ digicodes avec 2 lettres identiques.

EXERCICE 12

1) Il y a $6^3 = 216$ résultats possibles.

2) Il y a 6 résultats comportant 3 chiffres identiques.

3) Il s'agit d'un arrangement de 3 éléments parmi 6 : $6 \times 5 \times 4 = 120$ résultats comportant 3 chiffres distincts deux à deux.

4) Il faut placer les deux jets identiques parmi les 3, choisir les chiffres identiques puis le dernier parmi les 5 chiffres restants.

   Il y a donc $\binom{3}{2} \times 6 \times 5 = 90$ résultats avec 2 jets de chiffres identiques.

EXERCICE 13

1) Pour chaque chemise, il y a 4 choix de tiroir. Il y a donc $4^3 = 64$ répartitions possibles.

2) a) A : 1 répartition possible.

   b) B : Il y a le choix du tiroir, soit 4 répartitions possibles.

   c) C : Pour chaque chemise, il n'y a que 2 choix possibles. Il y a donc $2^3 = 8$ répartitions possibles

Exercice 14

Sous-ensemble

Il s'agit d'une combinaison de 3 éléments parmi 6.

Il y a donc $\dbinom{6}{3} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$ sous-ensembles.

Pour écrire tous les sous-ensembles de trois éléments, on respectera l'ordre alphabétique afin de ne pas en oublier.

a,b,c a,c,d a,d,e a,e,f	a,b,d a,c,e a,d,f	a,b,e a,c,f	a,b,f
b,c,d b,d,e b,e,f	b,c,e b,d,f	b,c,f	
c,d,e c,e,f	c,d,f		
d,e,f			

Exercice 15

Il s'agit d'une combinaison de 2 éléments parmi 18.

Il y a donc $\dbinom{18}{2} = \dfrac{18 \times 17}{2} = 153$ poignets de main.

Exercice 16

1) Si les jetons sont de couleurs différentes, l'ordre a de l'importance, c'est donc un arrangement de 4 éléments parmi 16.
   Il y a donc $A_{16}^{4} = 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 43\,680$ façons de les disposer.

2) Si les jetons sont identiques, l'ordre n'a plus d'importance, c'est donc une combinaison de 4 éléments parmi 16.
   Il y a donc $\dbinom{16}{4} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2} = 1\,820$ façons de les disposer.

Exercice 17

Loto

1) a) Pour le jeu à 7 : il y a 3 possibilités pour chacun des 7 matchs.
   $3^7 = 2\,187$ grilles différentes.

   b) Pour le jeu à 15 : il y a 3 possibilités pour chacun des 15 matchs.
   $3^{15} = 14\,348\,907$ grilles différentes.

2) a) Pour le jeu à 7 :

   - 1 grille avec tous les résultats exactes.

- Pour une grille avec 1 résultat faux : il faut choisir le match avec deux choix possibles : $\dbinom{7}{1} \times 2 = 14$

Il y a $\boxed{1 + 14 = 15}$ grilles gagnantes.

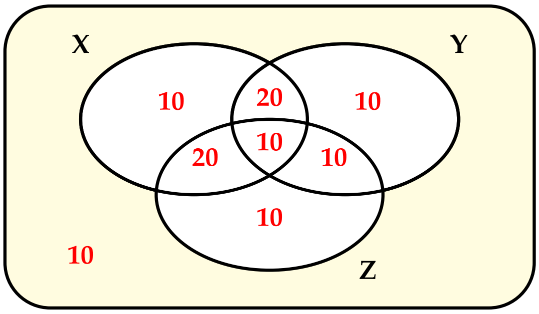
b) Pour le jeu à 15 :

- 1 grille avec tous les résultats exactes.
- Pour une grille avec 1 résultat faux : $\dbinom{15}{1} \times 2 = 30$
- Pour une grille avec 2 résultats faux : $\dbinom{15}{2} \times 2 = 210$
- Pour une grille avec 3 résultats faux : $\dbinom{15}{3} \times 2 = 910$

Il y a $\boxed{1 + 30 + 210 + 910 = 1\,151}$ grilles gagnantes.

EXERCICE 18

On peut réaliser un diagramme de Venn avec les trois ensemble X, Y et Z dans l'ensemble des 1 000 personnes. D'après les données et par supplément, on obtient alors le graphique suivant en pourcentage :



1) Il y a : $20 + 20 + 10 \; = \boxed{50 \text{ \%}}$ soit 500 personnes qui lisent deux de ces revues exactement.
2) Il y a 10 % soit 100 personnes qui ne lisent aucune revue.

EXERCICE 19

Jeu de cartes

1) Il faut choisir 1 roi, 1 dame et 2 valeurs parmi les 4 cartes des figures respectives puis 1 carte parmi les 20 cartes restantes :

$$\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{20}{1} = 4 \times 4 \times \frac{4 \times 3}{2} \times 20 = 1\,920$$

2) Il faut choisir l'as de pique puis soit 2, 3 ou 4 trèfles parmi les 8 trèfles et le complément à 5 parmi les 23 cartes restantes :

$$\binom{1}{1}\binom{8}{2}\binom{23}{2} + \binom{1}{1}\binom{8}{3}\binom{23}{1} + \binom{1}{1}\binom{8}{4} = 8\,442$$

3) Il faut choisir soit le roi de carreau, 1 autre carreau et 3 autres cartes qui ne sont ni un carreau ni un roi (21 cartes) **ou** 1 roi non carreau, 2 carreaux sauf le roi et 2 autres cartes qui ne sont ni un roi ni un carreau (21 cartes).

$$\binom{1}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{3}+\binom{3}{1}\binom{7}{2}\binom{21}{2}=22\,540$$

Exercice 20

1) Les 5 trous sont occupés par 1 fiche. Pour chaque trou, il y a 8 choix de couleur, il y a donc : $8^5 = 32\,768$ dispositions possibles.

2) Cette fois pour chaque trou, on a 9 possibilités : les 8 couleurs possibles et la possibilité de laisser vide le trou. Il y a donc $9^5 = 59\,049$ dispositions possibles.

3) Le constructeur a intérêt de donner le plus grand nombre de combinaison. Il utilise donc la variante du jeu consistant à laisser vide un trou pour obtenir le nombre de combinaisons maximum.

Exercice 21

1) Pour chaque item 3 choix donc $3^5 = 243$ façons.

2) Une seule façon de répondre correctement à chaque item.

3) Pour 4 items corrects, il faut choisir le item qui est faux qui donne ensuite 2 choix de réponses fausses : $5 \times 2 = 10$ façons.

Exercice 22

1) On peut avoir soit 3 boules rouges soit 3 boules jaunes.
   Il y a $\binom{4}{3}+\binom{3}{3} = 4+1 = 5$ tirages.

2) Il y a $\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 4 \times 3 \times 2 = 24$ tirages.

3) Parmi les 3 boules, on a soit 2 boules rouges, soit 2 boules jaunes soit 2 boules vertes et 1 boule parmi les autres couleurs.
   Il y a : $\binom{4}{2}\binom{5}{1}+\binom{3}{2}\binom{6}{1}+\binom{2}{2}\binom{7}{1} = 6 \times 5 + 3 \times 6 + 7 = 55$ tirages.

Exercice 23

Pour avoir un tirage tricolore, il faut tirer une boule blanche et une boule rouge de l'urne A. Ensuite comme il y a 4 boules bleues dans l'urne B, il y a 4 tirages possibles.

Il y a donc : $\binom{2}{1}\binom{5}{1} \times 4 = 2 \times 5 \times 4 = 40$ tirages tricolores possibles.

3 Formules

EXERCICE 24

1) On utilise la formule du binôme à l'aide du triangle de Pascal

a) $$\begin{aligned}(2-x)^4 &= 2^4 - 4\times 2^3x + 6\times 2^2x^2 - 4\times 2x^3 + x^4\\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(1-2x)^7 &= 1-7\times 2x+21\times 4x^2-35\times 8x^3+35\times 16x^4-21\times 32x^5+7\times 64x^6-128x^7\\ &= -128x^7 + 448x^6 - 672x^5 + 560x^4 - 280x^3 + 84x^2 - 14x + 1\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(1+2i)^6 &= 1+6\times 2i+15\times(-4)+20\times(-8i)+15\times 16+6\times 32i+(-64)\\ &= 1+12i-60-160i+240+192i-64\\ &= 117+44i\end{aligned}$$

2) On change de variable dans la somme $i = p-1$

$$5^n = (1+4)^4 = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}1^{n-p}4^p = 1+\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}4^p = 1+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}4^{i+1}$$
$$= 1+4\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}4^i$$

3) a) Il y a $\binom{3}{3} = 1$ tirage possible faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est 3.

Il y a $\binom{4}{3} = 4$ tirages possibles faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est 4.

b) Il y a $\binom{k}{3}$ tirages possibles faisant apparaître trois boules dont le plus grand numéro est k.

c) Le nombre de tirage de 3 boules dont le plus grand numéro est 7 vaut $\binom{7}{3}$.

Il se décompose en 1 boule avec le numéro 7 et deux boules dont le plus grand numéro est 2, 3, 4, 5 ou 6 donc :

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}=\binom{7}{3}$$

d) La formule du Pascal est $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$. On décompose :

$$\begin{aligned}\binom{7}{3} &= \binom{6}{2} + \binom{6}{3}\\ &= \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3}\\ &= \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}\\ &= \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}\\ &= \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}\end{aligned}$$

4) a) Il y a : $\binom{2n}{n}$ résultats possibles.

b) Si l'on a p boules blanches, on a $(n-p)$ boules noires. Pour avoir p boules blanches, il faut tirer p boules blanches parmi les n et $(n-p)$ boules noires parmi les n, en utilisant $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$:

$$\binom{n}{p}\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}\binom{n}{p} = \binom{n}{p}^2$$

c) Cette somme correspond aux possibilités de tirer $0,1,\dots,n$ boules blanches soit l'ensemble des possibilité de tirer n boules parmi les $2n$.

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$