Structure d'espace vectoriel

1 Combinaison linéaire

EXERCICE 1

a) Dans $\mathbb{R}^3$, (5,5,1) est-il combinaison linéaire de (2,3,0) (3,2,0) ?

b) Dans $\mathbb{R}[X]$, On donne :

- $P = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$
- $Q = 8X^3 - 5X^2 + 1$
- $R = X^2 + 7X - 2$

P est-il combinaison linéaire de Q et de R ?

c) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction $x \xmapsto{f} \cos^2 x$ est-elle combinaison linéaire des fonctions $x \xmapsto{g} 1$ et $x \xmapsto{h} \cos(2x)$?

d) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction $x \xmapsto{f} \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus ?

EXERCICE 2

Montrer que, pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et A.

2 Sous-espaces vectoriel

EXERCICE 3

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ 2x - 5y - 1 = 0\}$

b) $B = \{(x, 2x, 3x) \in \mathbb{R}^3 /\ x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ y = 0\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^3 + x + y^2 = 0\}$

e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$

f) $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) /\ f(0) + f(1) = f'(0)\}$

EXERCICE 4

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

a) L'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

d) L'ensemble des fonctions majorées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

e) L'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

EXERCICE 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que : $F \cup G$ sous-espace vectoriel de $E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G$ ou $G \subset F$.

b) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une suite filtrante de sous-espaces vectoriels de E, c'est à dire :
$$\forall i, j \in I, \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j = F_k$$
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

EXERCICE 6

Montrer à l'aide d'opérations sur les Vect l'égalité suivante :
$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}\left[(X+1)^2 \,,\, (X^2-1) \,,\, (X-1)^2\right]$$

EXERCICE 7

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $u = (1\,,-1\,,\,1)$ et $v = (0\,,\,1\,,\,a)$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a telle que $(1\,,\,1\,,\,2) \in \text{Vect}(u, v)$.

3 Familles libres et bases

EXERCICE 8

Montrer que les fonctions $x \overset{f}{\longmapsto} \sin x$, $x \overset{g}{\longmapsto} \cos x$, $x \overset{h}{\longmapsto} x \sin x$, $x \overset{k}{\longmapsto} x \cos x$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 9

On donne trois fonction $x \overset{f}{\longmapsto} e^x$, $x \overset{g}{\longmapsto} e^{2x}$ et $x \overset{h}{\longmapsto} e^{x^2}$.
Montrer que la famille (f, g, h) forme une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

EXERCICE 10

Montrer que deux manières différentes que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

EXERCICE 11

Montrer que les suites $(n^k)_{n \in \mathbb{N}}$, k décrivant $\mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes.

EXERCICE 12

On pose $P_0 = 1$ et $P_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que la famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 13

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, u_2, \dots u_n \in E$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$ on pose : $v_k = u_1 + u_2 \cdots + u_k$.

a) Montrer que : $(u_1, u_2, \dots u_n)$ libre $\Leftrightarrow$ $(v_1, v_2, \dots v_n)$ libre.

b) Montrer que : $(u_1, u_2, \dots u_n)$ engendre E $\Leftrightarrow$ $(v_1, v_2, \dots v_n)$ engendre E.

Exercice 14

Montrer que la famille $\left(x \xmapsto{f_\lambda} |x-\lambda|\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 15

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante c'est à dire que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

On note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A.
Soient $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{C}$. On suppose que : $x_1C_1+\dots+x_nC_n = 0$.
Montrer, en utilisant $\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$, que $x_1=\dots=x_n$.
Qu'en déduit-on sur A ?

Exercice 16

Montrer que la famille $\left(x \xmapsto{f_\lambda} e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

On pourra s'intéresser au comportement asymptotique des exponentielles.

Exercice 17

Montrer que la famille $\left(x \xmapsto{f_\lambda} \sin(\lambda x)\right)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 18

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est un corps et que $\mathbb{R}$ peut-être vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et que $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

a) Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\ln p$ est rationnel pour au plus un nombre premier p.

4 Bases et dimension

Exercice 19

a) Montrer que $((-1,1,1)\,,\,(1,-1,1)\,,\,(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur (8,4,2) dans cette base.

b) Montrer que $((X-1)^2\,,\,X^2\,,\,(X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme X^2+X+1 dans cette base.

c) Montrer que $(P\,,\,Q\,,\,R\,,\,S)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ avec :

$$P = X^3+X^2-X-1\ ,\quad Q = X^3-X^2+1\ ,\quad R = X^3-X^2+X\ ,\quad S = X^3+2X+1$$

Déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

Exercice 20

Déterminer une base pour chacun des sous-espaces vectoriels suivant :

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ \ x + 2y + z = 0\}$

b) $B = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) /\ \ AM = 0\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \{P \in \mathbb{R}_3[X] /\ \ P(X^2) = (X^3 + 1)P\}$

d) $D = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ \ x + y = 0 \text{ et } 2x - z + t = 0\}$

e) $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] /\ \ P(0) = P(1) = P(2)\}$

Exercice 21

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent à A.
Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 22

On note E l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 23

Soit E l'ensemble des fonctions : $x \mapsto A\sin(x + \varphi)$ A et φ décrivant $\mathbb{R}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 24

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}$ pour lequel la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^d)$ est liée.

b) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exercice 25

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $x \xmapsto{f} \sin(x + a)$, $x \xmapsto{g} \sin(x + b)$, $x \xmapsto{h} \sin(x + c)$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 26

a) Montrer que la famille : $(X^3 + X + 1\ ,\ X^3 - 2X + 2\ ,\ X^2 + 3X)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Montrer que la famille $((8,4,1,2)\ ,\ (1,3,0,5))$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

c) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E.

$$b_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad b_2 = e_2 - e_3$$

Montrer que (b_1, b_2) est libre et la compléter en une base de E.

Exercice 27

Déterminer la dimension de : $\text{Vect}\left((1,2,1,0)\ ,\ (4,-2,1,1)\ ,\ (7,2,4,2)\ ,\ (11,4,1,3)\right)$.

Exercice 28

Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1) $\left((2,0,\alpha)\ ,\ (2,\alpha,2)\ ,\ (\alpha,0,2)\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

2) $\left((1,0,2,1)\ ,\ (0,1,1,2)\ ,\ (2,0,1,1)\ ,\ (2,1,0,1)\right)$

Exercice 29

Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $d^\circ P_i = i$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.

Montrer que la famille $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 30

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_{2n+1})$ une famille libre de E.

Montrer par une technique matricielle que la famille suivante est libre :

$$(u_1 + u_2\ ,\ u_2 + u_3\ ,\ \ldots\ ,\ u_{2n} + u_{2n+1}\ ,\ u_{2n+1} + u_1)$$

5 Somme de deux espaces vectoriels

Exercice 31

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espace vectoriels de E.

Montrer que : $F \cup G = F + G \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 32

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $\dim F + \dim G > \dim E$.

Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

Exercice 33

Soit $F = \text{Vect}(a,b)$ et $G = \text{Vect}(u,v,w)$ avec :

$a = (0,0,1,0)\ ,\ b = (1,1,0,-1)\ ,\ u = (1,0,1,0)\ ,\ v = (0,1,-1,0)\ ,\ w = (1,1,1,1)$

Déterminer les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 34

$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ x + y + z = 0 \text{ et } y - z + t = 0\right\}$ et

$G = \text{Vect}\left((1,0,0,1)\ ,\ (0,1,1,0)\right)$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 35

À quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ les sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\left((\lambda,\lambda,1)\right)$ et $\text{Vect}\left((1,\lambda,1)\ ,\ (2,1,1)\right)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 36

Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \;/\; \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et

G l'ensemble des fonctions constantes sur [0,1].

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 37

Soient $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] / \; P(X^2) = X^2 P(X) \right\}$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] / \; P(1) = P(2) \}$.

Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$

Exercice 38

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les ensembles respectifs des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 39

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 et G trois sous-espaces vectoriels de E.

a) Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.

b) Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont-ils dans G ?

Exercice 40

En admettant que les ensembles suivants forment des sous-espaces vectoriels, déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

a) $A = \text{Vect}\left((1,2,1,1), (2,2,1,1), (0,2,1,1)\right)$ dans $\mathbb{R}^4$.

b) $B = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \; x + y + 2z - t = 0 \text{ et } y - z + t = 0 \right\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

c) $C = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] / \; P(-X) = P(X) \}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$

d) $D = \{ f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \; f(0) = f'(0) = 0 \}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

e) $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] / \; P' + 3P = P(0)X^3 + P(1)X + P(1) \right\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$

Exercice 41

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts et $F = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \; \forall k \in [\![1,n]\!], \; f(x_k) = 0 \}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$