Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

1 Produit scalaire et norme **2**
- 1.1 Produit scalaire . . . 2
- 1.2 Produit scalaire canonique . . . 2
- 1.3 Norme et distance associées à un produit scalaire . . . 3
- 1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire . . . 4

2 Orthogonalité **5**
- 2.1 Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales et orthonormées . . . 5
- 2.2 Propriétés des familles orthogonales . . . 6
- 2.3 Coordonnées dans une base orthogonale . . . 6
- 2.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . 7
- 2.5 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel . . . 9
- 2.6 Vecteur normal à un hyperplan et orientation . . . 10

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel **11**
- 3.1 Projecteurs et symétries orthogonales . . . 11
- 3.2 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie . . . 12

1 Produit scalaire et norme

1.1 Produit scalaire

Définition 1 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est forme bilinéaire symétrique φ définie positive.

- $\varphi \ : \ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, on notera $\varphi(x,y) = \langle x, y \rangle$
- Bilinéaire : $\forall x, y, z \in E,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \langle \lambda x + \mu y\ ,\ z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle \\ \langle x\ ,\ \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle \end{cases}$
- Symétrique : $\forall x, y \in E,\ \ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Définie : $\forall x \in E,\ \ \langle x, x \rangle = 0 \ \Rightarrow \ x = 0_E$ (séparation)
- Positive : $\forall x \in E,\ \ \langle x, x \rangle \geqslant 0$

E muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien réel.
Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé espace euclidien.

Remarque :

- Le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est aussi noté : $(x|y)$ ou $x \cdot y$ (dans le produit scalaire usuel).
- Dans la généralisation de la notion de produit scalaire, de norme et d'angle sur un espace vectoriel, on définit le produit scalaire d'abord contrairement à l'enseignement secondaire où le produit scalaire est défini à l'aide de la norme et de l'angle $(\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v}))$.
- Pour montrer la bilinéarité d'un produit scalaire potentiel, la linéarité par rapport à une seule variable est suffisante si l'on a pris la précaution de montrer la symétrie avant.
- Par bilinéarité : $\langle x, 0_E \rangle = \langle x, y - y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle = 0$

Exemple : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on définit $\varphi \begin{cases} \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (f, g) \quad \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t \end{cases}$

On montre facilement qu'une telle application est symétrique, bilinéaire, définie et positive. L'application φ est donc un produit scalaire.

1.2 Produit scalaire canonique

Théorème 1 : L'application $(X, Y) \mapsto {}^tXY = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé son produit scalaire canonique.

Remarque : On retrouve le produit scalaire du secondaire dans $\mathbb{R}^3$ défini à l'aide des coordonnées $(\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz')$.

Démonstration :

- Symétrie : ${}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = {}^tYX$
- Bilinéarité : ${}^tX(\lambda Y + \mu Z) = \lambda\, {}^tXY + \mu\, {}^tXZ$ par symétrie du produit matriciel.
- Séparation : ${}^tXX = 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \forall k \in [\![1,n]\!],\ x_k = 0 \quad\Rightarrow\quad X = 0_{\mathbb{R}^n}$
- Positivité : ${}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$

Exemple : On peut donner plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel. Sur $\mathbb{R}^2$, mis à part le produit scalaire canonique, on peut donner le produit scalaire suivant :

Pour $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$, on définit $\langle X, Y\rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy'$

- La symétrie et la bilinéarité sont immédiates.
- Positivité : $\langle X, X\rangle = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = x^2 + y^2 + (x+y)^2 \geqslant 0$
- Séparation : $\langle X, X\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad x = y = 0 \quad\Rightarrow\quad X = 0$

1.3 Norme et distance associées à un produit scalaire

Définition 2 : Soit E un espace préhilbertien réel.

- On appelle norme sur E associée à un produit scalaire , l'application suivante :

$$\begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto ||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{cases}$$

- On dit qu'un vecteur x de E est unitaire si $||x|| = 1$
- On appelle distance sur E associée à un produit scalaire, l'application suivante :

$$d \begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) \longmapsto d(x, y) = ||x - y|| \end{cases}$$

Remarque : On voit que la notion de norme ou de distance est relative car elles dépendent du produit scalaire utilisé. La distance usuelle n'en est qu'une parmi d'autres.

Exemple : Soit le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$: $\langle X, Y\rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy'$

- $||X|| = \sqrt{x^2 + y^2 + (x+y)^2}$ donc $||(1, 0)|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (1+0)^2} = \sqrt{2}$
- $d\,[(3, 2), (1, 0)] = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2 + (3-1+2-0)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Théorème 2 : Identités remarquables. Soit $x, y \in E$ espace préhilbertien réel

- $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$
- $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$ identité de polarisation

Remarque : On retrouve ainsi la définition que l'on avait donnée au lycée.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Théorème 3 : Soit E un espace préhilbertien réel et $x, y, z \in E$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||.||y||$
- Inégalité triangulaire sur la norme : $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$
- Inégalité triangulaire sur la distance : $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Démonstration :

- Cauchy-Schwartz :
  - Si $y = 0_E$, $|\langle x, 0_E\rangle| = 0 \leqslant 0 = ||x||.||y||$. L'inégalité est vérifiée.
  - Si $y \neq 0_E$, posons la fonction $t \mapsto ||x+ty||^2$.

    On a $||x+ty||^2 = ||x||^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2||y||^2 \geqslant 0$

    donc ce trinôme en t admet un discriminant négatif ou nul :

    $$\Delta \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2.||y||^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||.||y||$$
  - On a l'égalité si

    $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad$ la fonction $t \mapsto ||x+ty||^2$ s'annule $\quad \Rightarrow \quad \exists\, t_0,\ x + t_0 y = 0_E$.

    Les vecteurs x et y sont alors colinéaires.
- Inégalité triangulaire :

  $$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \overset{\text{Schwartz}}{<} ||x||^2 + 2||x||.||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

  Il y a égalité si $\langle x, y\rangle = ||x||.||y||$ sont x et y sont colinéaires de même sens pour avoir $\langle x, y\rangle \geqslant 0$

Exemples :

- Pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, avec $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = 1_{\mathbb{R}^n}$

  Cauchy-Schwartz : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ ce qui n'a rien de bien surprenant.
- En reprenant le produit scalaire dans $\mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

  Cauchy-Schwartz avec $g = f'$: $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales et orthonormées

Définition 3 : Soit E un espace préhilbertien réel, $x, y \in E$

- On dit que x et y sont orthogonaux, noté $x \perp y$, si : $\langle x, y\rangle = 0$.
- On dit que les parties X et Y de E sont orthogonales, noté $X \perp Y$ si :

$$\forall x \in X,\ \ \forall y \in Y,\ \ \langle x, y\rangle = 0$$

- On dit que la famille (x_i) de E est orthogonale si : $\forall i, j,\ i \neq j,\ \ \langle x_i, x_j\rangle = 0$
- On dit que la famille (x_i) de E est orthonormée si elle est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires ($\langle x_i, x_i\rangle = 1$)

Remarque :

- On généralise la notion d'orthogonalité à l'aide du produit scalaire. La notion d'orthogonalité tout comme la notion de distance est relative à un produit scalaire donné.
- Pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée.

Exemples :

- On pose $f_n\ :\ t \mapsto \sin(nt)$. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathscr{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est une base orthonormée.

  En effet $\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ \ m \neq n$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2nt)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2nt)}{4nt}\right]_0^{2\pi} = 1$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos[(m-n)t] - \cos[(m+n)t]\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin[(m-n)t]}{m-n} - \frac{\sin[(m+n)t]}{m+n}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

- L'ensemble des fonctions paire et l'ensemble des fonctions impaires sont deux parties de $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ orthogonales pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

  Soit f_p et f_i deux fonctions respectivement paire et impaire de $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$

$$\langle f_p, f_i\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{f_p(t)f_i(t)}_{\text{impaire}}\,\mathrm{d}t = 0$$

Théorème 4 : Dans un repère préhilbertien réel, le vecteurs nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur

2.2 Propriétés des familles orthogonales

Théorème 5 : Soit E un espace préhilbertien réel.

- **Théorème de Pythagore :**
  - $\forall x, y \in E,\ \ x \perp y \ \ \Leftrightarrow \ \ ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$
  - Pour toute famille orthogonale (x_i) de E, on a : $\left|\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\right|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2$
- Toute famille orthogonale de E, de vecteurs non nuls, est libre.

Remarque : C'est une généralisation du théorème de Pythagore en dimension n pour un produit scalaire donné.

Démonstration :

- D'après les identités remarquables

$$x \perp y \ \ \Leftrightarrow \ \ ||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\underbrace{\langle x, y\rangle}_{=0} + ||y||^2 = ||x^2||^2 + ||y||^2$$

(x_i) famille orthogonale : $\left|\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\right|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \underbrace{\langle x_i, x_j\rangle}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2$

- Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonal de E de vecteurs non nuls.

  Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$, on a alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 0 = \langle 0_E, x_i\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\ ,\ x_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x_k, x_i\rangle = \lambda_i ||x_i||^2$$

  Comme $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \neq 0$ alors $\lambda_1 = 0$

2.3 Coordonnées dans une base orthogonale

Théorème 6 : Soient E un espace euclidien et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $x \in E$.

alors $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$ donc $(\langle x, e_1\rangle, \dots, \langle x, e_n\rangle)$ sont les coordonnées de x

Démonstration : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans $(e_1, \dots, e_n)$

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \ \langle x, e_k\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\ ,\ e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle e_i, e_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \delta_{ik} = x_i$$

Théorème 7 : Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans une base orthonormée de E.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{et} \quad ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Remarque : On retrouve le résultat connu dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ appris au lycée.

⚠ Ceci n'est valable que dans une base orthonormée.

Démonstration : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\,,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 8 : Tout espace euclidien admet une base orthonormée

Démonstration : On démontre ce théorème grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt qui permet de construire explicitement une famille orthonormée à partir d'une famille libre.

Théorème 9 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E. Alors il existe une famille orthonormée $(u_1, \dots, u_n)$ de E telle que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

On peut construire par récurrence $(u_1, \dots, u_n)$ de sorte que :

$$u_k = \frac{v_k}{||v_k||} \quad \text{avec} \quad v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle\, u_i$$

Remarque : Cet algorithme construit u_k en lui retranchant ses composantes selon $u_1, \dots, u_{k-1}$ puis en rendant le tout unitaire en divisant par sa norme.

Démonstration : Soit la proposition pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$P(k)\ :\ \exists (u_1, \dots, u_k)$ famille orthonormée et $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$

Initialisation : : $k = 1$: il suffit de normaliser e_1 en prenant $u_1 = \dfrac{e_1}{||e_1||}$

$\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(u_1)$ la proposition est initialisée.

Hérédité : Supposons $P(k)$ vraie et $k \in [\![1, n-1]\!]$.

On a $(u_1, \dots, u_k)$ orthonormé et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

et posons $v_{k+1} = e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}\,,\; u_i\rangle\, u_i$

Alors $v_{k+1} \neq 0_E$ car $(e_1, \dots, e_n)$ libre et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle v_{k+1}, u_j\rangle &= \left\langle e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}\,,\; u_i\rangle\, u_i\,,\; u_j\right\rangle \\
&= \langle e_{k+1}, u_j\rangle - \left(\sum_{i=1}^{k} \langle e_{k+1}\,,\; u_i\rangle\right) \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{\text{HR } = \delta_{ij}} \\
&= \langle e_{k+1}, u_j\rangle - \langle e_{k+1}, u_j\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc $(u_1, \dots, u_k, v_{k+1})$ est une famille orthogonale libre $(v_{k+1} \neq 0_E)$.
On a alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$

On pose alors $u_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}}{||v_{k+1}||}$

$(u_1, \dots, u_{k+1})$ est alors orthonormée et $\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$
La proposition est héréditaire.

Exemple : Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons (P_0, P_1, P_2) une famille orthogonale construit par cet algorithme.

- $P_0 = \dfrac{1}{||1||} = 1$ car $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$

- $P_1 = \dfrac{Q_1}{||Q_1||}$ avec $Q_1 = X - \langle X, P_0\rangle\, P_0 = X - \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = X - \frac{1}{2}$

  $$||Q_1||^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

  On en déduit $P_1 = \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X - 1)$

- $P_2 = \dfrac{Q_2}{||Q_2||}$ avec $Q_2 = X^2 - \langle X^2, P_0\rangle\, P_0 - \langle X^2, P_1\rangle\, P_1$

  $$\langle X^2, P_0\rangle = \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

  $$\langle X^2, P_1\rangle = \sqrt{3}\int_0^1 t^2(2t - 1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_0^1 (2t^3 - t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^3}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

  Donc $Q_2 = X^2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{(\sqrt{3})^2}{6}(2X - 1) = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$

  $$\begin{aligned}
  ||Q_2||^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^2 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right) \mathrm{d}t \\
  &= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{4}{9}t^3 - \frac{t^2}{6} + \frac{t}{36}\right]_0^1 = \frac{1}{180}
  \end{aligned}$$

On en déduit alors : $P_2 = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \dfrac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6x^2 - 6X + 1)$

Comme on a pu le voir cet algorithme est très calculatoire. Un programme est alors le bien venu pour soulager les calculs.

Théorème 10 : Soit E un espace euclidien de dimension $n \neq 0$.
Toute famille orthonormée de E peut être complétée en base orthonormée de E.

Démonstration : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de E. On peut la compléter en une base de E puis l'orthonormaliser grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt. L'algorithme n'affecte pas les premiers vecteurs $e_1,\dots,e_p$ qui forment déjà une famille orthonormée.

2.5 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 4 : Soient E un espace préhilbertien réel et X une partie de E.
On appelle orthogonal de X dans E l'ensemble noté $X^\perp$ défini par :

$$X^\perp = \{y \in E,\ \ \forall x \in X,\ \ \langle y, x\rangle = 0\}$$

$X^\perp$ sous-espace vectoriel de E orthogonal à X et $X \cap X^\perp = \{0_E\}$ et $X \subset X^{\perp\perp}$

Démonstration :

- Sous-espace vectoriel : $\forall x \in E,\ \ \forall y, y' \in X^\perp$
  - $\forall x \in E,\ \ \langle 0_E, x\rangle = 0$ donc $0_E \in X^\perp$
  - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \ \langle \lambda y + \mu y', x\rangle = \lambda \langle y, x\rangle + \mu \langle y', x\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \lambda y + \mu y \in X^\perp$
- Soit $x \in X \cap X^\perp \ \Rightarrow\ \langle x, x\rangle = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_E$ (séparation).
- Soit $x \in X^{\perp\perp} \ \Rightarrow\ \langle x, y\rangle = 0 \ \Rightarrow\ x \in X$

Théorème 11 : Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de dimension finie de E.
$F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F dans E orthogonal à F et $F^{\perp\perp} = F$

Remarque : Il est nécessaire que F soit de dimension finie. Si F n'est pas de dimension finie, $F^\perp$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F. On peut seulement dire que F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Démonstration : Montrons que $E \subset F + F^\perp$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de F et $x \in E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \; , \; e_i \right\rangle = \langle x, e_i \rangle - \left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \right) \langle e_k, e_i \rangle$$
$$= \langle x, e_i \rangle - \left(\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \right) \delta_{ki} = \langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle = 0$$

$x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ orthogonal à $(e_1, \ldots, e_n)$ donc élément de $F^\perp$ et donc $x \in F + F^\perp$

L'unicité du supplémentaire orthogonal : Soit G un autre supplémentaire orthogonal de F dans E.

- $F \perp G \quad \Rightarrow \quad G \subset F^\perp$.
- $x \in F^\perp$, comme G un supplémentaire de F et comme $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, $x \in G$.

On a donc $G = F^\perp$

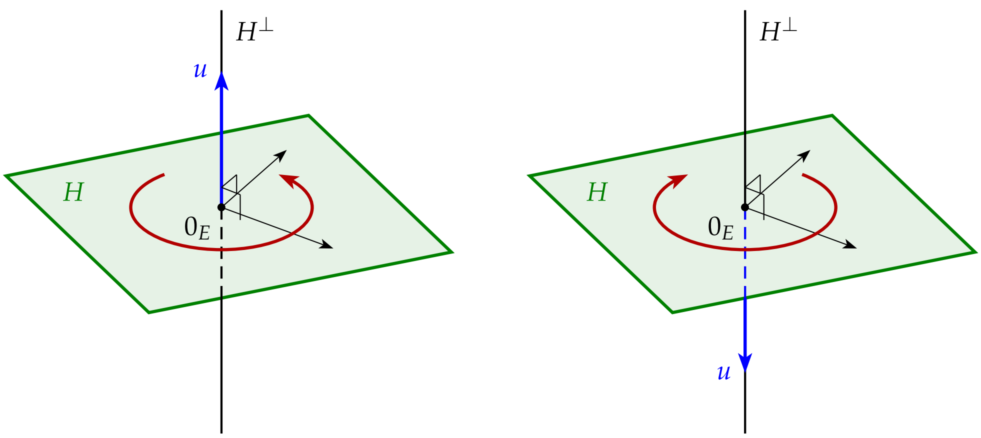
$F = F^{\perp\perp}$ découle de $E = F \oplus F^\perp$

2.6 Vecteur normal à un hyperplan et orientation

Définition 5 : Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et H un hyperplan de E.

- $H^\perp$ est une droite vectorielle dont tout vecteur non nul est appelé vecteur normal à H.
  Par extension, pour tout hyperplan affine $\mathcal{H}$ de E de direction H, les vecteurs normaux à H sont aussi appelés vecteurs normaux à $\mathcal{H}$.
- Si E est orienté et si u est un vecteur normal à H, on définit sur l'ensemble des bases de H une relation $\mathscr{R}$, « avoir la même orientation » telle que 2 bases de H ont la même orientation si ces bases complétées par u sont des bases de même orientation sur E.

Remarque : L'orientation de E ne se transmet pas à un hyperplan. L'orientation de H est aussi fonction du vecteur normal u choisi.



Un hyperplan est par définition le noyau d'une forme linéaire. De plus la droite vectorielle $H^\perp$ est orthogonale à l'hyperplan H donc :

$$H = \text{Vect}(u)^\perp = (x \in E, \; \langle x, u \rangle = 0) \quad \Rightarrow \quad H = \text{Ker}\,\varphi_u \text{ avec } \varphi_u : x \mapsto \langle x, u \rangle$$

Si $E = \mathbb{R}^n$, on retrouve l'équation analytique de H : $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = 0$ pour le produit scalaire canonique et $(x_1, \dots, x_n)$ et $(u_1, \dots, u_n)$ les coordonnées de x et u dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

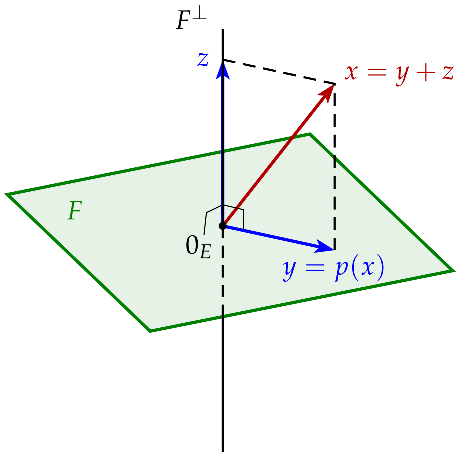
3.1 Projecteurs et symétries orthogonales

Définition 6 : Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

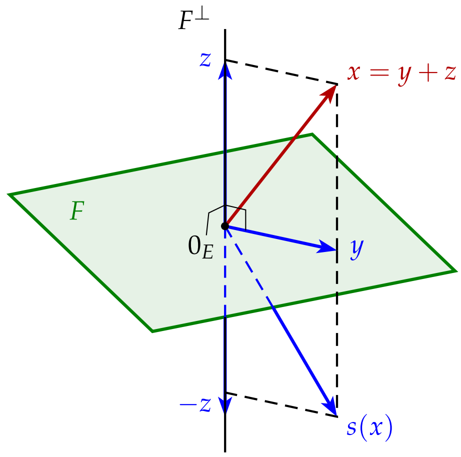
- On appelle projecteur orthogonal sur F la projection sur F de direction $F^\perp$
- On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

  On préfère parler de réflexion par rapport à F lorsque F est un hyperplan de E

Remarque : Comme F est de dimension finie, on a : $E = F \oplus F^\perp$.



Projecteur orthogonal



Symétrie orthogonale

Théorème 12 : Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F.

Soit p le projecteur orthogonal sur F, alors pour tout $x \in E$: $\quad p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k$

Démonstration : On rappelle que $\langle x, e_k \rangle$ correspond à la composante de x selon e_k. Soit $x \in E$:

comme $E = F \oplus F^\perp$ alors $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k \in F^\perp$ et donc $p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k$

Remarque : Si F est un hyperplan d'un espace euclidien de vecteur normal u, alors $F^\perp$ est la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$. Si u est unitaire alors la projection sur F est simplement $p(x) = x - \langle x, u \rangle \, u$.

3.2 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

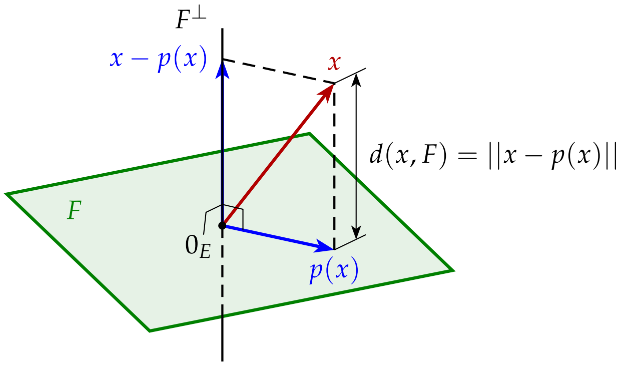
Définition 7 : Soient E un espace préhilbertien réel, F une partie non vide de E et $x \in E$.

La distance de x à F, notée $d(x,F)$ est définie par $d(x,F) = \inf\limits_{y \in F} ||x-y||$

Remarque : Intuitivement, la distance entre x et F est la « plus petite distance » entre x et tous les éléments y de F. Elle n'est pas nécessairement atteinte, c'est pourquoi on a utilisé la borne inférieure. Nous allons voir qu'elle est atteinte pour un sous-espace vectoriel.

Théorème 13 : Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. On note p le projecteur orthogonal sur F.

- La distance de x à F est atteinte en $p(x)$: $d(x,F) = ||x - p(x)||$
- De plus $d(x,F)^2 = ||x||^2 - ||p(x)||^2$



Démonstration :

Soit $\mathcal{D}_x = \{||x-y\}_{y \in F}$, comme $p(x) \in F$ donc $||x-p(x)|| \in \mathcal{D}_x$

p est le projecteur orthogonal sur F, donc $x - p(x) \in F^{\perp}$. Pour tout $y \in F$, on a :

$$x - y = \overbrace{(x-p(x))}^{\in F^{\perp}} + \overbrace{(p(x)-y)}^{\in F} \overset{\text{Pythagore}}{\Rightarrow} ||x-y||^2 = ||x-p(x)||^2 + ||p(x)-y||^2$$

donc $\forall y \in F,\ ||x-y|| \geqslant ||x-p(x)||$ donc $||x-p(x)|| = \inf\limits_{y \in F} \mathcal{D}_x$

La borne inférieure est atteinte : $d(x,F) = ||x-p(x)||$

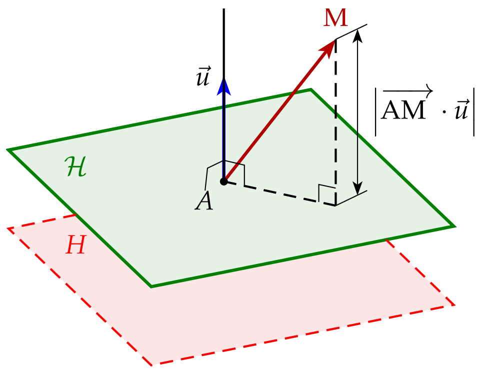
De plus si $y \in F / \{p(x)\}$ alors $||p(x)-y|| > 0$ donc $||x-y|| > ||x-p(x)||$.

La distance $d(x,F)$ n'est atteinte qu'en $p(x)$.

Théorème 14 : **Distance à un hyperplan.** Soit E un espace euclidien et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine passant par A et de vecteur normal unitaire $\vec{u}$.

$$\forall \mathrm{M} \in E \ : \ d(\mathrm{M}, \mathcal{H}) = \left| \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{u} \right|$$

Démonstration :



Soit H la direction de $\mathcal{H}$ et p le projecteur orthogonal sur H.

Comme u est unitaire,
$\forall x \in E, \;\; p(x) = x - \langle x, u\rangle\, u$

$$d(\mathrm{M}, \mathcal{H}) = d(\mathrm{M}, \mathrm{A} + H) = \inf_{y \in H} d\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, y\right)$$
$$= d\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, H\right) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AM}} - p(\overrightarrow{\mathrm{AM}})\right\|$$
$$= \left\|\left\langle \overrightarrow{\mathrm{AM}}, u\right\rangle u\right\|$$

En prenant la notation usuelle du produit scalaire : $d(\mathrm{M}, \mathcal{H}) = \left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{u}\right|$

Exemple : Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$,
Déterminer la distance du point M(4,3,2) au plan $\mathscr{P}$ d'équation $\;2x + y + 2z = 3$

Le plan $\mathscr{P}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$:

- passant par le point A(1,1,0) donc $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (3, 2, 2)$
- de vecteur unitaire $\vec{u} = \dfrac{(2, 1, 2)}{\sqrt{4+1+4}} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

donc $\;d(\mathrm{M}, \mathscr{P}) = \left|\overrightarrow{\mathrm{AM}\cdot\vec{u}}\right| = \left|3 \times \dfrac{2}{3} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{2}{3}\right| = 4$