Isométries Vectorielles
Matrices orthogonales

Table des matières

1 Isométries vectorielles

1.1 Définition et théorèmes

Définition 1 : Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
On dit que f est une isométrie vectorielle de E si f préserve la norme :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

Théorème 1 : Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
f est une isométrie de E si, et seulement si, f conserve le produit scalaire.

Démonstration : On rappelle que : $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)$

- Soit f une isométrie. Pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2\right)\\ &\overset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - ||f(x)||^2 - ||f(y)||^2\right)\\ &\overset{f\text{ iso.}}{=} \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - ||x||^2 - ||y||^2\right)\\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

  f conserve le produit scalaire.
- Réciproquement. Soit f endomorphisme qui conserve le produit scalaire.

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle \overset{\text{cons. pdt. sc.}}{=} \langle x, x\rangle = \|x\|$$

  f conserve la norme c'est donc une isométrie.

Théorème 2 : Soient E un espace euclidien et s une isométrie de E.
Alors s est un automorphisme de E appelé automorphisme orthogonal de E.

Démonstration : Déterminons le noyau de f :

$$||s(x)|| = 0 \overset{\text{isométrie}}{\Rightarrow} ||x|| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0_E$$

s est un endomorphisme injectif et comme E est de dimension finie, s est un automorphisme.

1.2 Image d'une base orthonormée par une isométrie

Théorème 3 : Soient $E \neq \{0_E\}$ un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ et B une base orthonormée de E.

$$f \text{ isométrie vectorielle de } E \quad \Leftrightarrow \quad f(B) \text{ est une base orthonormée de } E$$

Remarque : Une isométrie transforme une base orthonormée en une base orthonormée et réciproquement.

Démonstration : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$

- Soit f une isométrie de E, elle conserve le produit scalaire donc :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

  $f(B)$ est donc une famille de $n(\dim E)$ vecteurs orthogonaux unitaires.

  $f(B)$ est une base orthonormée de E.

- Réciproquement $f(B)$ est une base orthonormée de E. Montrons que f conserve le produit scalaire :

  Soit $x, y \in E$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans B

$$\langle f(x), f(y) \rangle \overset{\text{linéarité}}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \right\rangle = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_i x_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y \rangle$$

1.3 Groupe orthogonal d'un espace euclidien

Définition 2 : Soit E un espace euclidien.

L'ensemble des isométries vectorielles de E, noté $\mathrm{O}(E)$, est un sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ de E appelé groupe orthogonal de E.

Démonstration : $\mathrm{GL}(E)$ est un groupe linéaire pour la composition.
De plus $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ car une isométrie est un automorphisme.

Montrons que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$

- $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{O}(E)$ car Id_E conserve la norme.
- Soit $f, g \in \mathrm{O}(E)$, montrons que $f^{-1} \circ g \in \mathrm{O}(E)$

$$\forall x \in E, \quad \left\| f^{-1} \circ g(x) \right\| \overset{f \in \mathrm{O}(E)}{=} \left\| f \circ f^{-1} \circ g(x) \right\| = \|g(x)\| \overset{g \in \mathrm{O}(E)}{=} \|x\|$$

  $f^{-1} \circ g$ conserve la norme donc $f^{-1} \circ g \in \mathrm{O}(E)$

2 Matrices orthogonales

2.1 Définition

Définition 3 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(R)$

A est une matrice orthogonale si A est inversible d'inverse ${}^tA$

Remarque : Pour vérifier que A est inversible d'inverse ${}^tA$, on montrera que :

- ${}^tAA = I_n$ ou $A{}^tA = I_n$
- ou bien que la famille des colonnes ou des lignes de A est une base orthonormée de l''espace euclidien canonique.

Exemple : Il est facile de vérifier qu'une matrice carrée est orthogonale, il suffit de vérifier si ses colonnes forment une famille orthonormée ou non.

- $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

  En effet ses deux colonnes sont de norme 1 et de produit scalaire nul.

- $B = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, en effet :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ donc } ||e_1|| = \frac{\sqrt{2+2+2}}{6} = 1$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0) \text{ donc } ||e_2|| = \frac{\sqrt{3+3+0}}{6} = 1$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) \text{ donc } ||e_3|| = \frac{\sqrt{1+1+4}}{6} = 1$$

$$e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{6} + \sqrt{6} + 0) = 0 \ , \ e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{3} + \sqrt{3} + 0) = 0$$

2.2 Isométries vectorielles et matrices orthogonales

Théorème 4 : Soient E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et B une base orthonormée de E.

$$f \text{ isométrie vectorielle} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Mat}_B(f) \text{ orthogonale}$$

Démonstration : Posons $M = \text{Mat}_B(f)$ et $B = (e_1, \ldots, e_n)$

- f est une isométrie. Soit $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M

  Comme f converse le produit scalaire, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$

  $$\langle C_i, C_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \overset{f \text{ iso.}}{=} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

  Donc M est orthonormée.

- Réciproquement si M est orthogonale

  $$\|f(x)\|^2 = {}^t(MX)(MX) = {}^tX({}^tMM)X = {}^tXI_nX = {}^tXX = ||x||^2$$

  f conserve la norme donc f est une isométrie.

Théorème 5 : Soit B et B' deux bases orthonormées d'un espace euclidien E.

La matrice de passage $P_B^{B'}$ de B à B' est une matrice orthogonale.

Remarque : Il est donc facile de calculer son inverse : $\left(P_B^{B'}\right)^{-1} = {}^tP_B^{B'}$

Démonstration : Notons f l'endomorphisme de E qui envoie B sur B'.
Comme B et B' sont orthogonales, f est une isométrie vectorielle donc :
$P_B^{B'} = \text{Mat}_B(B') = \text{Mat}_B(f)$ est orthogonale.

Théorème 6 : L'ensemble des matrices orthogonales de taille n, notée $\text{O}(n)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé le groupe orthogonal de degré n.

Remarque : Le produit de deux matrices orthogonales et l'inverse d'une matrice orthogonale sont des matrices orthogonales.

3 Signe d'une isométrie et d'une matrice orthogonale

3.1 Définition

Définition 4 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $f \in \text{GL}(E)$ isométrie.

- On a alors $\det(A) = \pm 1$.
  A est positive si $\det(A) = 1$ et négative si $\det(A) = -1$
- On a alors $\det(f) = \pm 1$.
  f est un isométrie positive si $\det(f) = 1$ et négative si $\det(f) = -1$

Remarque :

- On parle aussi d'isométrie directe ou indirecte pour une isométrie positive ou négative.
- Si f est une isométrie positive alors $\text{Mat}_B(f)$ est une matrice orthogonale positive.
- Toute matrice de déterminant ± 1 n'est pas nécessairement orthogonale par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Démonstration :

- A orthogonale alors : $\det(A^2) = \det(A^tA) = \det(I_n) = 1 \quad\Rightarrow\quad \det(A) = \pm 1$.
- Si f isométrie et B base orthonormée de E alors $\text{Mat}_B(f)$ est orthogonale donc $\det(f) = \pm 1$

Exemple : Une réflexion est une isométrie négative.

3.2 Groupe spécial orthogonal

Définition 5 : Soit E un espace euclidien de dimension n

- L'ensemble des automorphisme orthogonaux positifs de E, noté $\mathrm{SO}(E)$, est un sous groupe de $\mathrm{O}(E)$ appelé le groupe spécial orthogonal de E.
- L'ensemble des matrices orthogonales positives de taille n, noté $\mathrm{SO}(n)$, est un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$, appelé le groupe spécial orthogonal de degré n.

4 Produit mixte. Aires et volumes orientés

4.1 Produit mixte

Définition 6 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \neq 0$ et $x_1, \dots, x_n \in E$.

- $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ ne dépend pas de la base B de E choisie si elle est orthonormée directe. On l'appelle le produit mixte de $x_1, \dots, x_n$ et on le note : $[x_1, \dots, x_n]$.
- Le produit mixte d'une base orthonormée directe est toujours égal à 1.

Remarque :

- Lorsque l'orientation de E change, le produit mixte est changé en son opposé.
- Le produit mixte de $\mathbb{R}^3$ est nul si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

4.2 Aires et volumes

On a vu dans le chapitre sur les déterminants, dans $\mathbb{R}^2$, que l'on interprète $\det_B(\vec{u}, \vec{v})$ comme une aire dans une base B choisie, ce qui rend la notion d'aire relative donc arbitraire.
Avec le produit scalaire qui rajoute la notion d'orthogonalité et de norme, l'aire devient absolue dans une base orthonormée directe, c'est à dire que l'unité d'aire, arêtes orthogonales de côté 1 (un carré), est constante dans toutes ces bases.

Dans $\mathbb{R}^3$, $\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ s'interprète comme un volume dans une base B choisie, ce qui rend là encore la notion de volume relative donc arbitraire.

Avec le produit mixte, le volume devient absolu, c'est à dire que l'unité de volume, arêtes orthogonales de côté 1 (un cube), est constante dans toutes les bases orthonormées directes.

De plus le produit mixte permet de relier longueur (norme) et aire ou volume.

Exemple : Déterminer le volume du parallélépipède construit, dans une base orthonormée directe, sur les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = (2;1;4), \quad \vec{v} = (3\,;-2\,;\,5) \quad \text{et} \quad \vec{w} = (8;1;3)$$

Le produit mixte donne :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -12+40+12+64-10-9 = 85$$

Le volume du parallélépipède est de 85 unités de volume.

5 Isométrie vectorielles d'un plan euclidien

5.1 Matrice orthogonale de taille 2

Théorème 7 : Dans O(2) le groupe orthogonale de degré 2.

- Les matrices positives sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$
- Les matrices négatives sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$

Démonstration : Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

$$A \in \mathrm{O}(2) \quad \Leftrightarrow \quad A^tA = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+c^2 = 1 \\ b^2+d^2 = 1 \\ ac+bd = 0 \end{cases}$$

Des deux premières équations : $\exists\, \theta, \varphi \in \mathbb{R} / \begin{cases} a = \cos\theta \text{ et } c = \sin\theta \\ b = \cos\varphi \text{ et } d = \sin\varphi \end{cases}$

La 3ᵉ équation donne alors :

$$\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta-\varphi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\varepsilon,\ \varphi = \theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

De plus $\cos\left(\theta + \varepsilon\dfrac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon\sin\theta$ et $\sin\left(\theta + \varepsilon\dfrac{\pi}{2}\right) = \varepsilon\cos\theta$

Donc $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{vmatrix} = \varepsilon$

Remarque : Le groupe SO(2) est commutatif car θ et θ' joue le même rôle :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

5.2 Classification des automorphismes orthogonaux

Théorème 8 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $f \in \mathrm{O}(2)$

- Si f est positive alors f est la rotation vectorielle r_θ d'angle de mesure θ

  Dans une base orthonormée directe, $\mathrm{Mat}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$

- Si f est négative alors f est la réflexion vectorielle s_Δ par rapport à la droite Δ.

  Dans une base orthonormée directe, $\mathrm{Mat}(s_\Delta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$

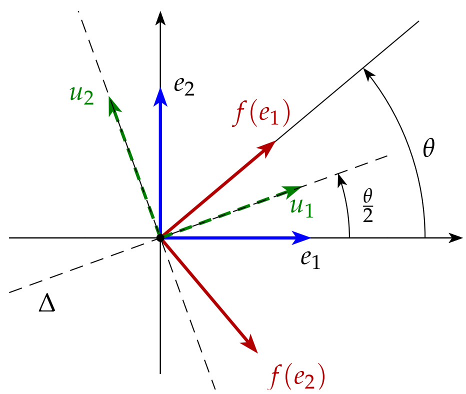
Remarque : On parle de rotation d'angle de mesure θ sans avoir défini auparavant les mots « angles » et « mesure ».

On peut résumer la définition d'un angle orienté comme :

Pour tous vecteurs unitaires u et v, il existe une et une seule rotation r pour laquelle $v = r(u)$ que l'on appelle angle orienté (u, v).

Tout réel θ pour lequel $\mathrm{Mat}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est appelé mesure de l'angle orienté $(u, v) = \theta\ [2\pi]$

Démonstration : Pour la réflexion



Supposons que f est négative.

Soit (e_1, e_2) base orthonormée directe.

$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

e_1 et $f(e_1)$ d'une part et e_2 et $f(e_2)$) d'autre part sont orthogonalement symétrique par rapport à la droite Δ engendré par u_1.

Montrons que f est la réflexion par rapport à Δ.

On pose : $u_1 = \cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2$ et $u_2 = -\sin\frac{\theta}{2}e_1 + \cos\frac{\theta}{2}e_2$

Il est immédiat que (u_1, u_2) est une base orthonormée directe.

On montre facilement que $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = -u_2$

On a alors $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

f est alors la réflexion par rapport à la droite Δ

5.3 Rotation dans C plan vectoriel de R

Théorème 9 : Soit le plan euclidien $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle z, z' \rangle = \text{Re}(\bar{z}z')$ et la base canonique $(1, i)$ orthonormée directe.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction $r \quad z \mapsto e^{i\theta}$ est la rotation d'angle de mesure θ du plan euclidien $\mathbb{C}$

Remarque : On retrouve ainsi un résultat bien connu !

Démonstration : r est linéaire car :

$$r(\lambda z + \mu z') = e^{i\theta}(\lambda z + \mu z') = \lambda\, e^{i\theta}\, z + \mu\, e^{i\theta}\, z' = \lambda\, r(z) + \mu\, r(z')$$

La matrice de r dans la base $(1, i)$:

$$\begin{cases} r(1) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ r(i) = e^{i\theta}\, i = -\sin\theta + i\cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Mat}_{(1,i)}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

6 Produit vectoriel

6.1 Définition

Définition 7 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Pour deux vecteurs u et v de E, il existe un unique vecteur de E, noté $u \wedge v$, appelé produit vectoriel de u et v pour lequel :

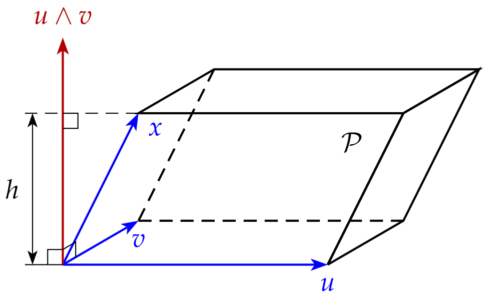
$$\forall x \in E, \quad [u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle$$

Remarque : On pourrait généraliser ce produit à $(n-1)$ vecteurs dans un espace de dimension $n \geqslant 3$.

- Le produit mixte $[u, v, x]$ correspond au volume orienté du parallélépipède $\mathcal{P}$ engendré par u, v et x.
- Si $u \wedge v \neq 0_E$, posons $a = \dfrac{u \wedge v}{||u \wedge v||}$

  On a alors $\langle u \wedge v, x \rangle = ||u \wedge v||\, \langle a, x \rangle$

  $\langle a, x \rangle$ est la hauteur h de $\mathcal{P}$ comme indiquée sur le dessin.



Conclusion : $||u \wedge v||$ est alors la valeur de l'aire engendré par u et v.

Démonstration : Un peu technique. Soit $a, a', u, v \in E$

- Soit l'application $\varphi \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a \longmapsto \varphi(a) = f_a \end{cases}$ où f_a est la forme linéaire $x \mapsto \langle a, x\rangle$

  L'application φ est linéaire. En effet : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

  $$f_{\lambda a+\mu a'}(x) = \big\langle \lambda a + \mu a' \ , \ x\big\rangle = \lambda \langle a, x\rangle + \mu \big\langle a', x\big\rangle = \lambda f_a(x) + \mu f_{a'}(x)$$

  Donc $\varphi(\lambda a + \mu a') = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(a')$

  φ est injective car :

  $\varphi(a) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f_a = 0_E \quad \Rightarrow \quad f_a(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle a, a\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$

  Comme $\dim \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = \dim E$, f est un isomorphisme.

- L'application $x \mapsto [u, v, x]$ est une forme linéaire du type f_a, comme φ est un isomorphisme, il existe un unique $a = u \wedge v$ tel que :

  $$\forall x \in E, \ \ f_{u\wedge v}(x) = [u, v, x] \quad \Leftrightarrow \quad \langle u \wedge v, x\rangle = [u, v, x]$$

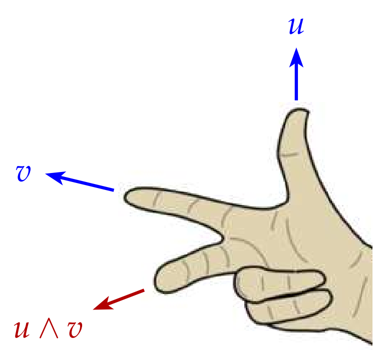
6.2 Propriété du produit vectoriel

Théorème 10 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3

- Le produit vectoriel est une forme bilinéaire alternée de $E \times E$ dans E :
  $$v \wedge u = -u \wedge v$$
- $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
- u et v colinéaires $\Leftrightarrow$ $u \wedge v = 0_E$
- Si u et v ne sont pas colinéaires alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E
- Si (u, v) est orthonormée alors :
  $$(u, v, w) \text{ base orthonormée directe} \quad \Leftrightarrow \quad w = u \wedge v$$
- Si $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ dans une base orthonormée directe :
  $$u \wedge v = \left(\overbrace{\begin{vmatrix} y & z \\ z & z' \end{vmatrix}}^{\text{on raye } x, x'} \ , \ \overbrace{\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}}^{\text{on raye } y, y'} \ , \ \overbrace{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}^{\text{on raye } z, z'} \right)$$
  $$= (yz' + zy' \ , \ zx' - xz' \ , \ xy' - yx')$$

Remarque : Pour déterminer la direction de $u \wedge v$ à partir de u et v (sens direct)

- Méthode du tire-bouchon : on tourne de u vers v avec la **main droite**.
- La méthode des trois doigts de la **main droite** :
  - le pouce : u
  - l'index : v
  - le majeur : $u \wedge v$



Exemple : Calculer les coordonnées de $u \wedge v$ avec $u = (2, 3, 4)$ et $v = (5, 6, 7)$

On écrit les coordonnées en ajoutant les 2 premières coordonnées à la fin $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

- On raye la 1re ligne et l'on prend les deux suivantes : $x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 24 = -3$
- On raye la 2e ligne et l'on prend les deux suivantes : $y = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 14 = 6$
- On raye la 3e ligne et l'on prend les deux dernières : $y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$

On a donc $u \wedge v = (-3\,,\, 6\,, -3)$

Démonstration :

- Le produit mixte étant un déterminant, le produit mixte d'une famille liée est nul.
$$\left.\begin{aligned} \langle u \wedge v, u \rangle = [u, v, u] = 0 \\ \langle u \wedge v, v \rangle = [u, v, v] = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad u \wedge v \perp u \quad \text{et} \quad u \wedge v \perp v$$
- Si u et v liés : $||u \wedge v||^2 = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = [u, v, u \wedge v] = 0$ donc $u \wedge v = 0_E$

  Réciproquement $u \wedge v = 0_E$

  comme $\dim \mathrm{Vect}(u, v) \leqslant 2$ il existe donc un vecteur $x \in E / \mathrm{Vect}(u, v)$

  et comme $[u, v, x] = \langle u \wedge v, x \rangle = \langle 0_E, x \rangle = 0$ la famille u, v, x est liée

  alors comme x n'est ni lié à u ni à v, on a u et v liés.
- u et v non liés alors $[u, v, u \wedge v] \neq 0$
$$[u, v, u \wedge v] = \langle u \wedge v, u \wedge v \rangle = ||u \wedge v||^2 > 0$$
  donc $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe.
- (u, v) famille orthonormée.
  - Montrons que $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe.

    D'après précédemment il est sûr que la base $(u, v, u \wedge v)$ est orthogonales directe. Montrons que $||u \wedge v|| = 1$
$$||u \wedge v|| = \left\langle u \wedge v, \frac{u \wedge v}{||u \wedge v||} \right\rangle = \left[u, v, \frac{u \wedge v}{||u \wedge v||} \right] \overset{\text{orthonormée}}{=} 1$$
  - Réciproquement soit (u, v, w) orthonormée directe. Montrons que $w = u \wedge v$

    Comme $\dim(u, v) = 2$, donc $\dim \mathrm{Vect}(u, v)^{\perp} = 1$ donc w et $u \wedge v$ sont colinéaires et donc $u \wedge v = \lambda w$ et alors
$$\lambda = \langle \lambda w, w \rangle = \langle u \wedge v, w \rangle \overset{\text{orthonormée}}{=} [u, v, w] = 1$$
- Pour la première coordonnées dans la base (i, j, k)
$$x_{u \wedge v} = \langle u \wedge v, i \rangle = [u, v, i] = \begin{vmatrix} x & x' & 1 \\ y & y' & 0 \\ z & z' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - zy'$$